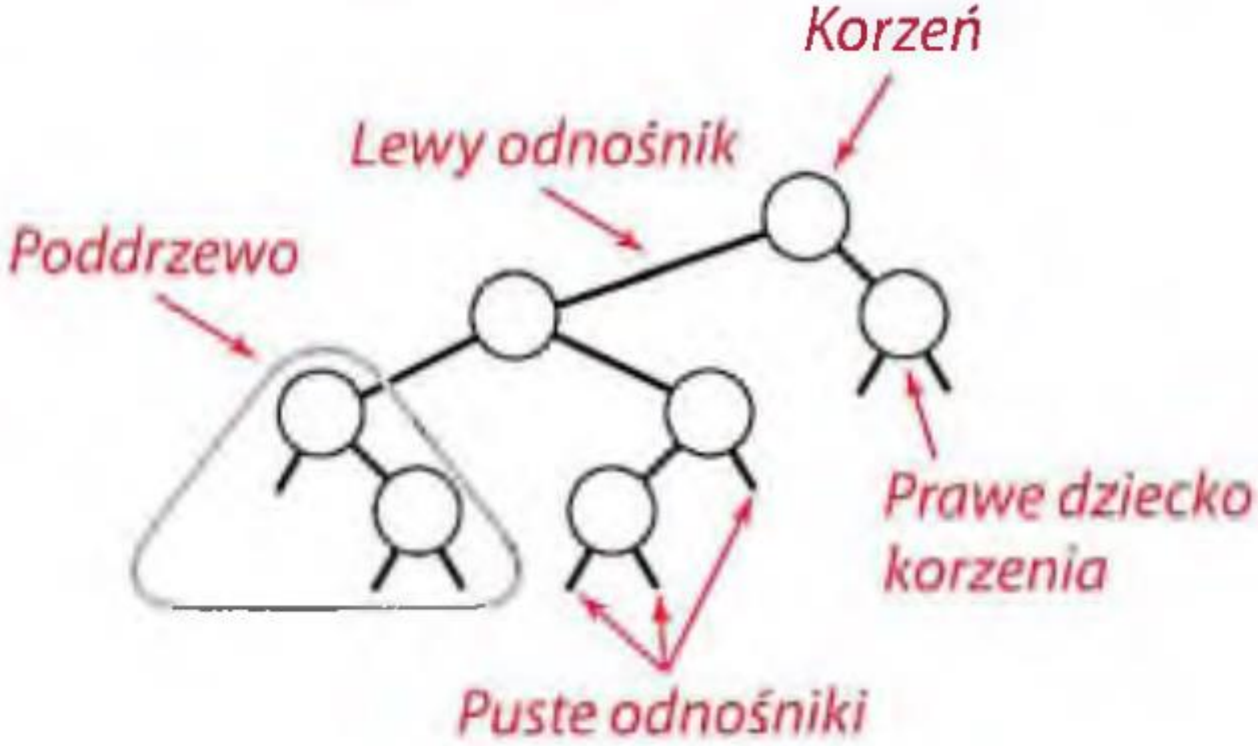
Drzewa BST

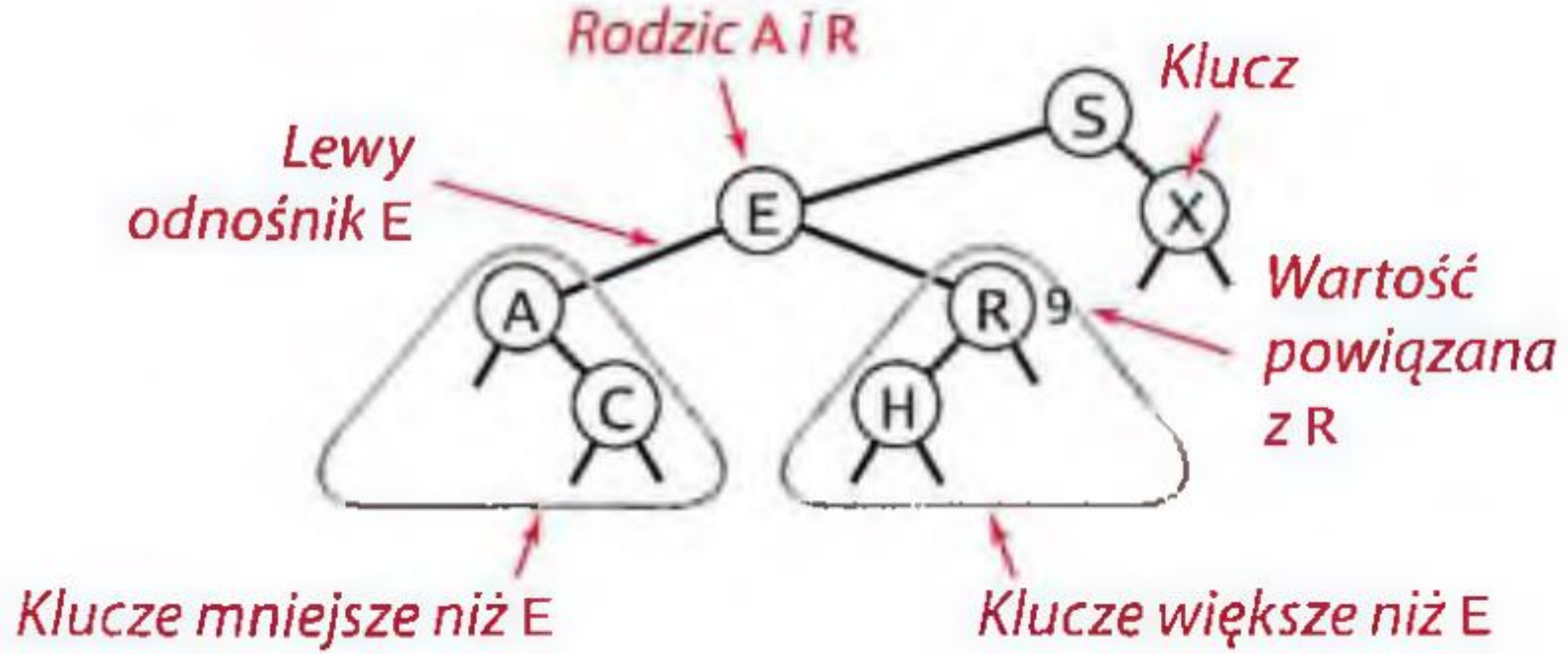
na podstawie:

Robert Sedgewick, Kevin Wayne

Algorytmy. Wydanie IV



Struktura drzewa binarnego

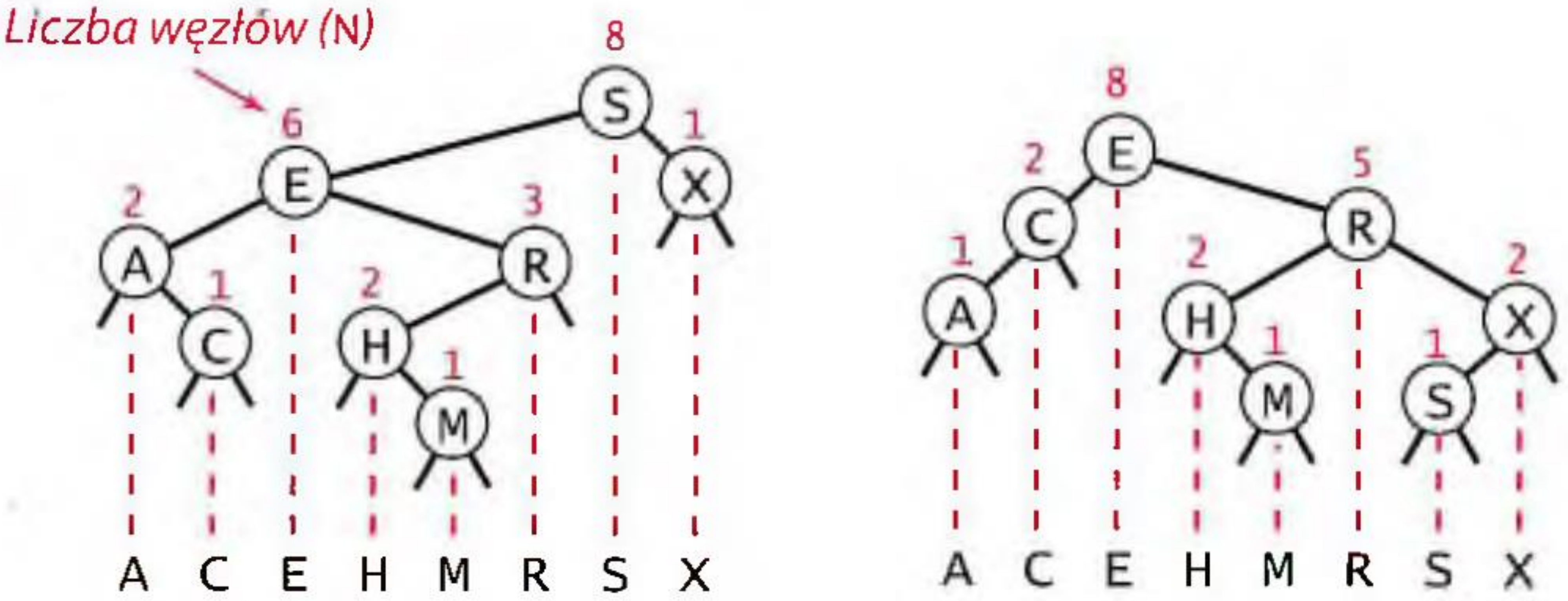


Struktura binarnego drzewa wyszukiwań

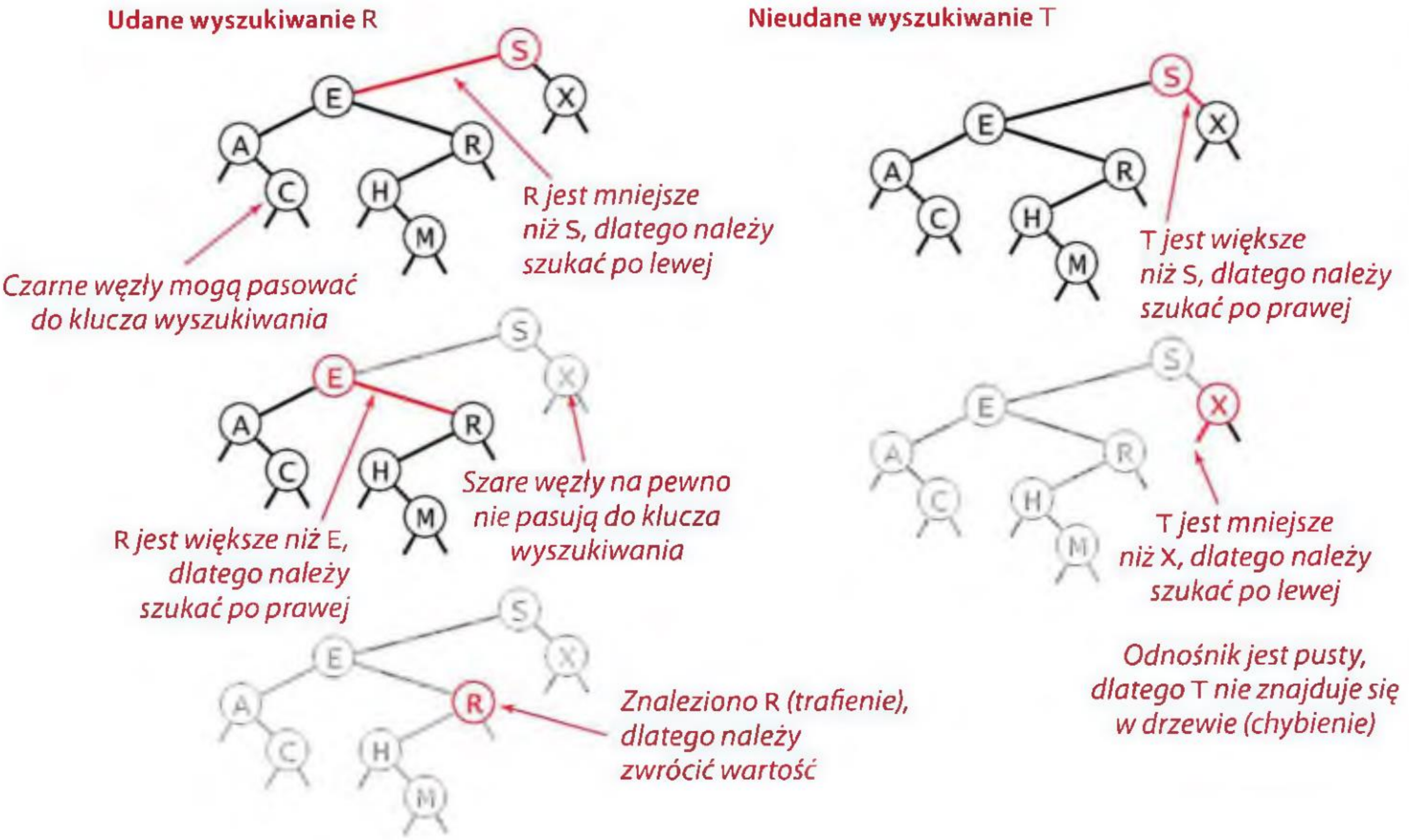
Definicja.

Binarne drzewo wyszukiwań (ang. binary search tree - BST) to:

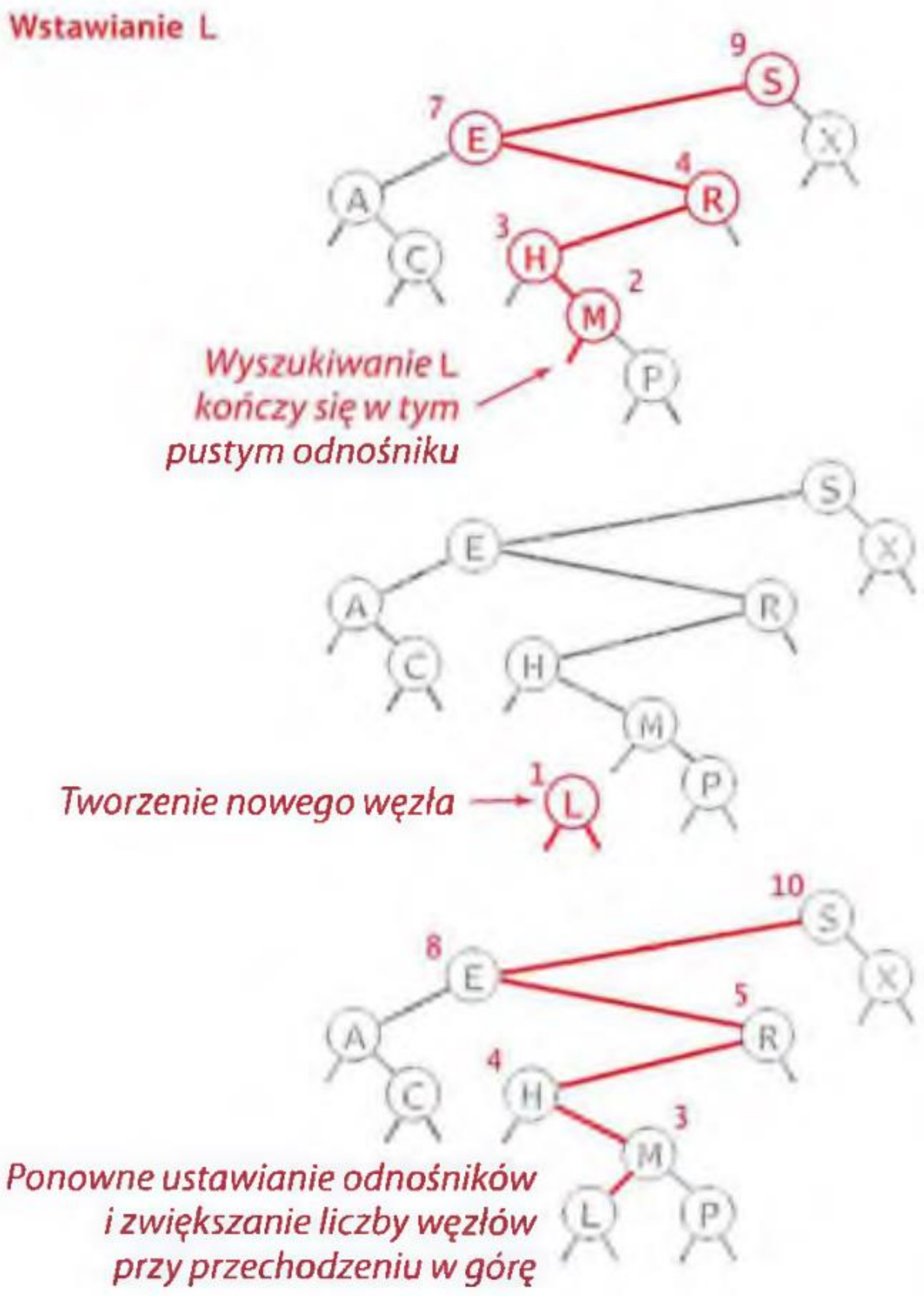
- drzewo binarne,
- każdy węzeł ma klucz (klucze można pomiędzy sobą porównywać),
- klucz w każdym węźle jest większy niż klucze we wszystkich węzłach lewego poddrzewa,
- klucz w każdym węźle jest mniejszy niż klucze we wszystkich węzłach prawego poddrzewa.



Dwa drzewa BST reprezentujące ten sam zbiór kluczy



Trafienia (po lewej) i chybienia (po prawej) w drzewie BST



Wstawianie do drzewa BST

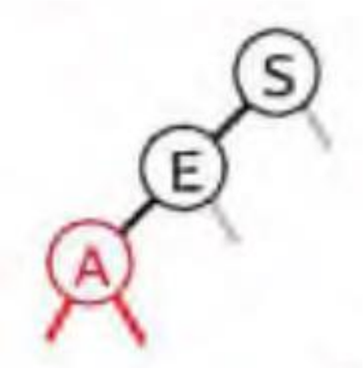
Zadanie – wstawianie do drzewa BST

- Zaczynając od pustego drzewa BST wstaw do niego kolejno elementy: S, E, A, R, C, H, X, M, P, L.
- Narysuj drzewo po wstawieniu każdej litery.

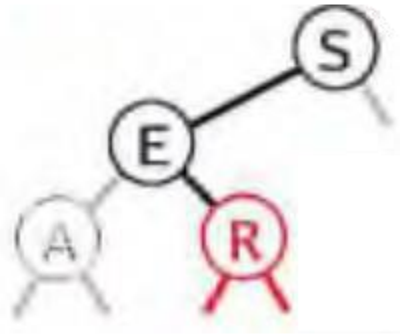
S

E

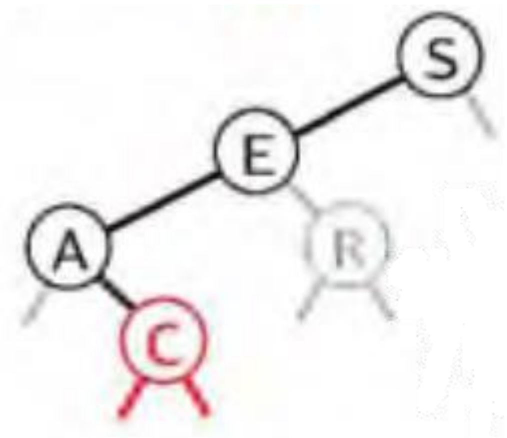
A



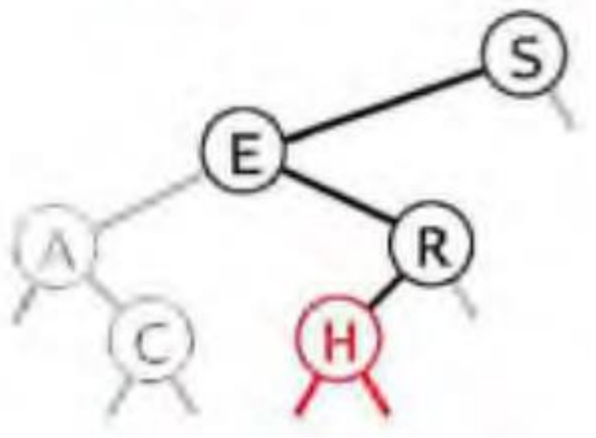
R



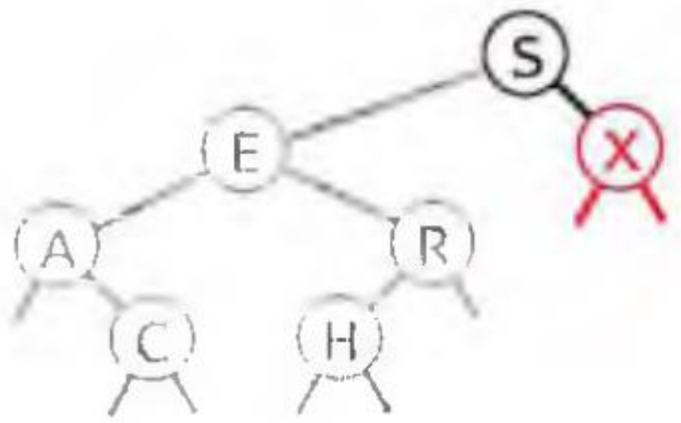
C



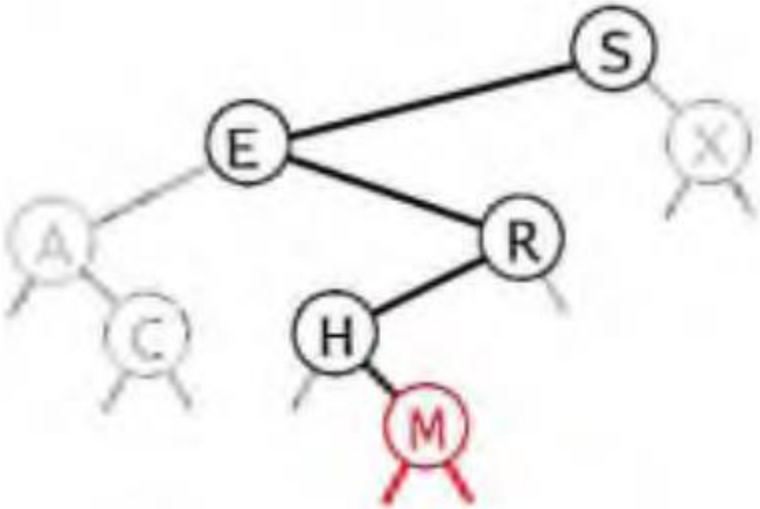
H



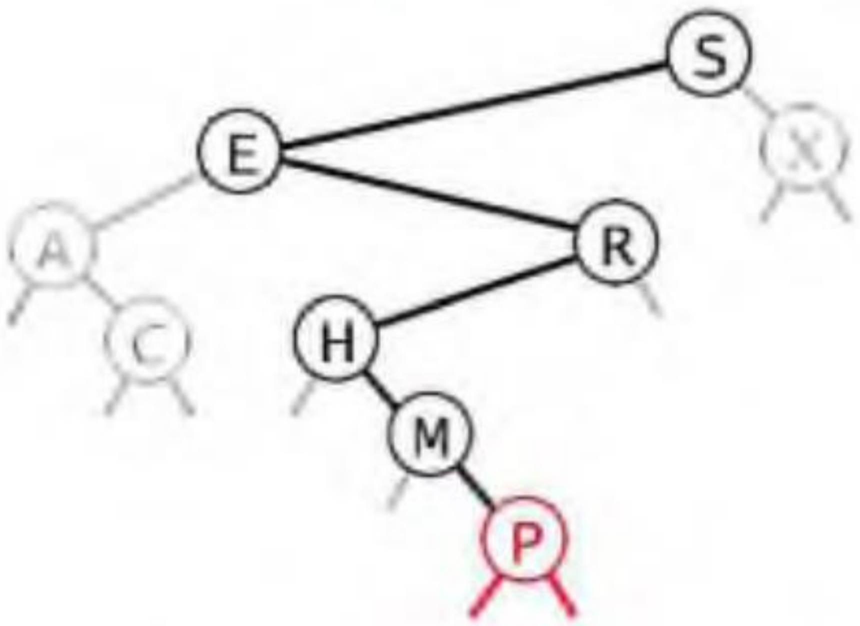
X



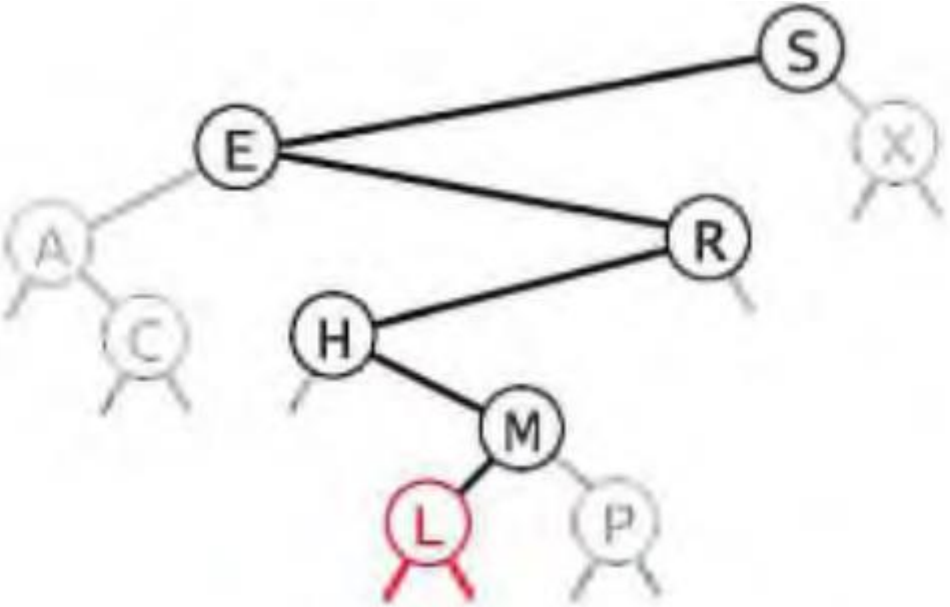
M

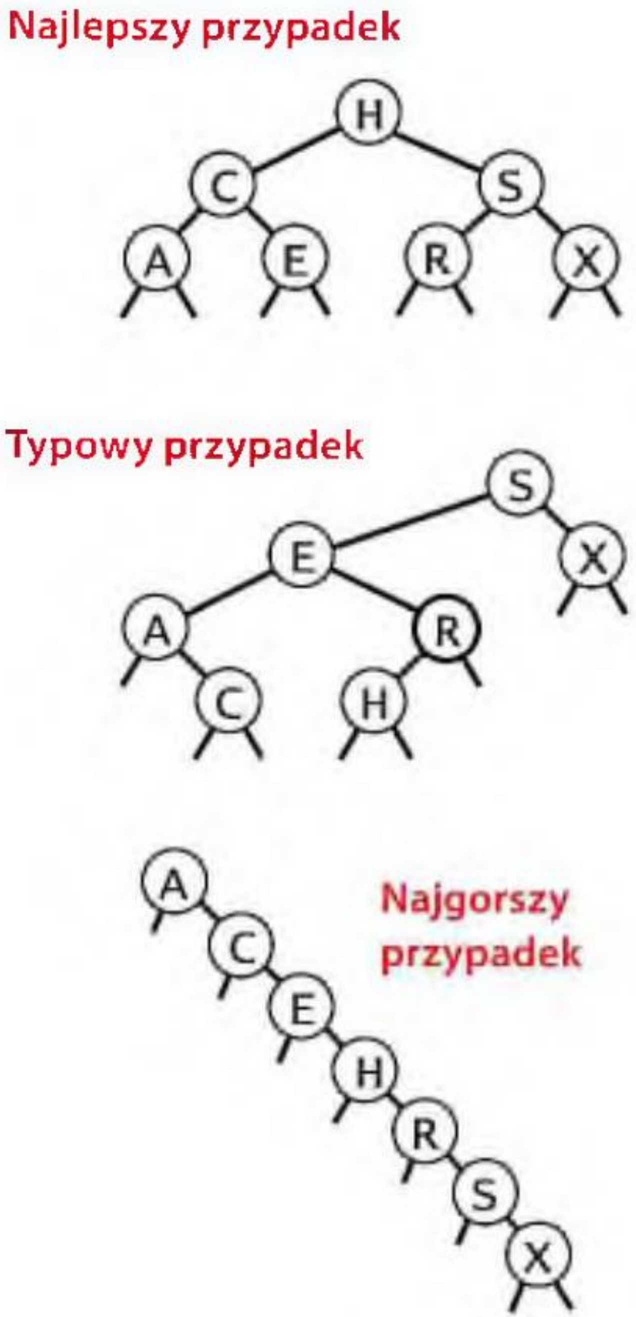


P

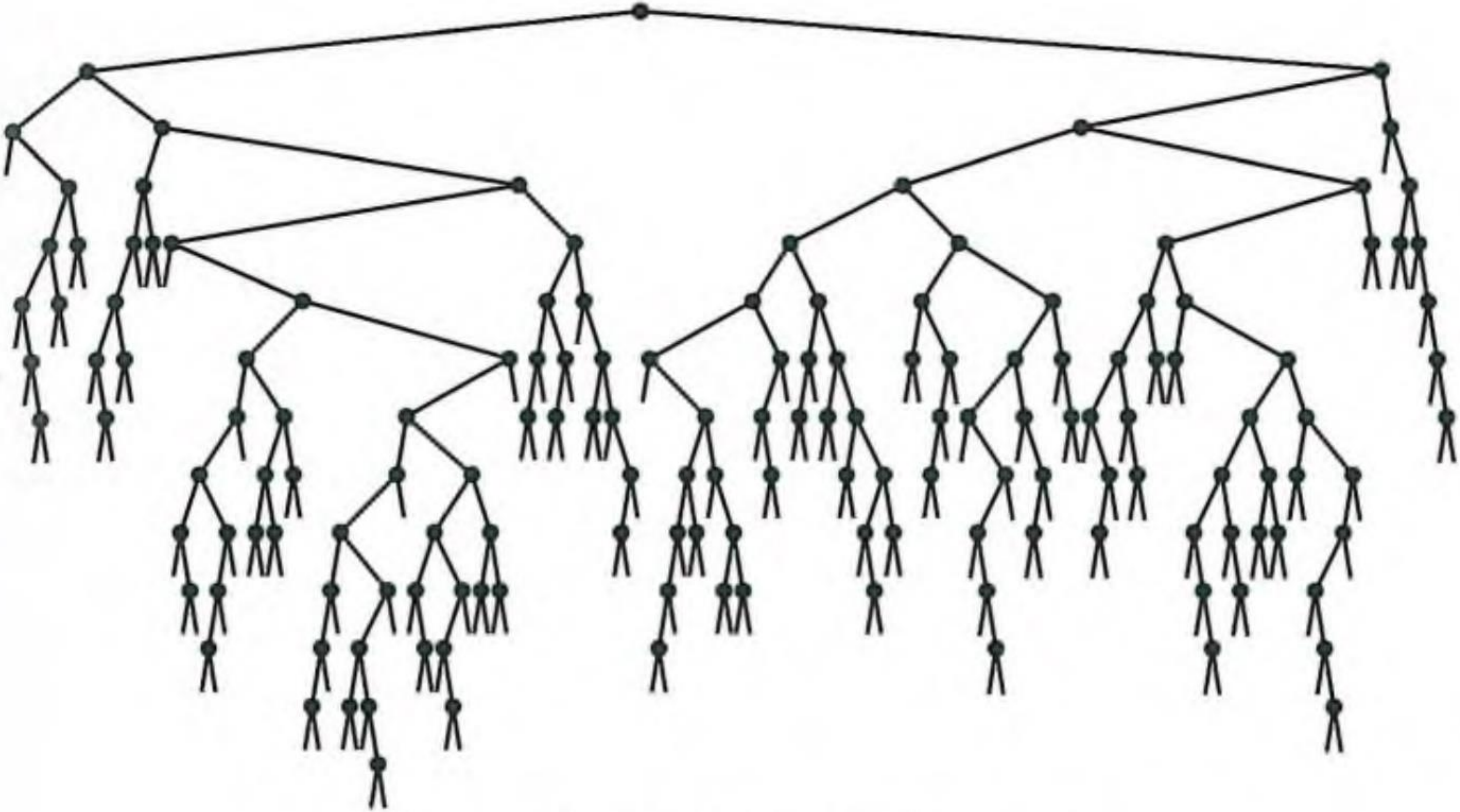


L





Możliwe drzewa BST



Typowe drzewo BST zbudowane z 256 losowych kluczy

Drzewa wyszukiwań 2-3

Podstawowy krok, który pozwala osiągnąć elastyczność potrzebną do zagwarantowania zbalansowania drzewa wyszukiwań, związany jest z umożliwieniem przechowywania w węzłach drzewa więcej niż jednego klucza.

Węzły w standardowym drzewie BST są podwójne (przechowują dwa odnośniki i jeden klucz), natomiast tu umożliwiamy tworzenie węzłów potrójnych (obejmujących trzy odnośniki i dwa klucze). Zarówno wersja podwójna, jak i potrójna posiada jeden odnośnik do każdego z przedziałów wyznaczanych przez klucze.

Definicja.

Drzewo wyszukiwań 2-3 to drzewo, które jest albo puste, albo jest:

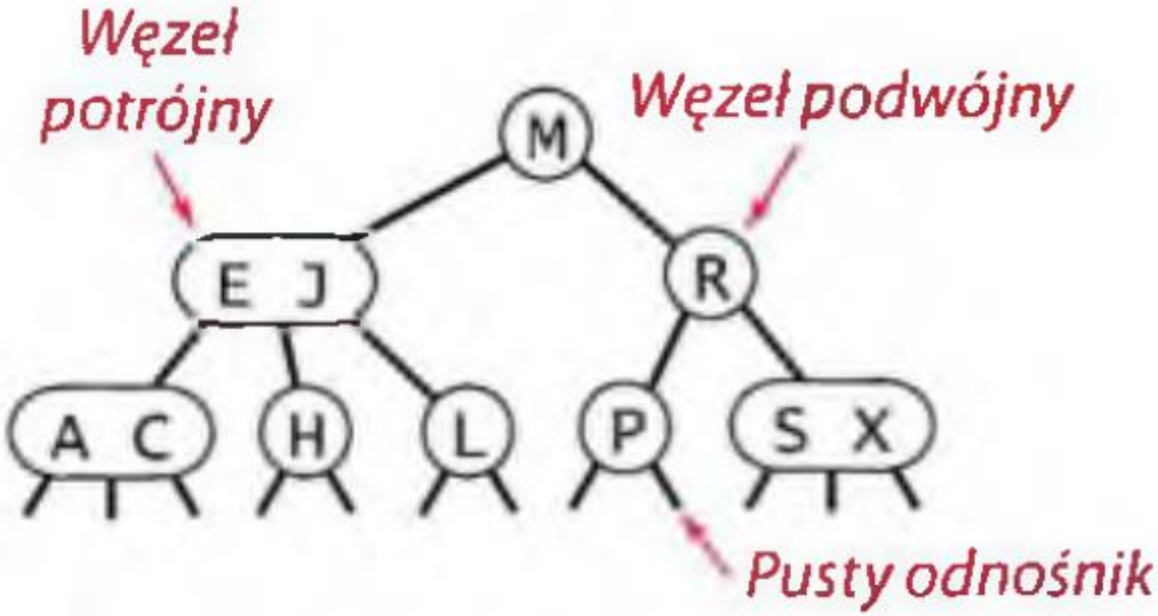
■ węzłem podwójnym — o jednym kluczu oraz dwóch odnośnikach;
lewy prowadzi do drzewa wyszukiwań 2-3 z mniejszymi kluczami,
a prawy — do drzewa wyszukiwań 2-3 z większymi kluczami;

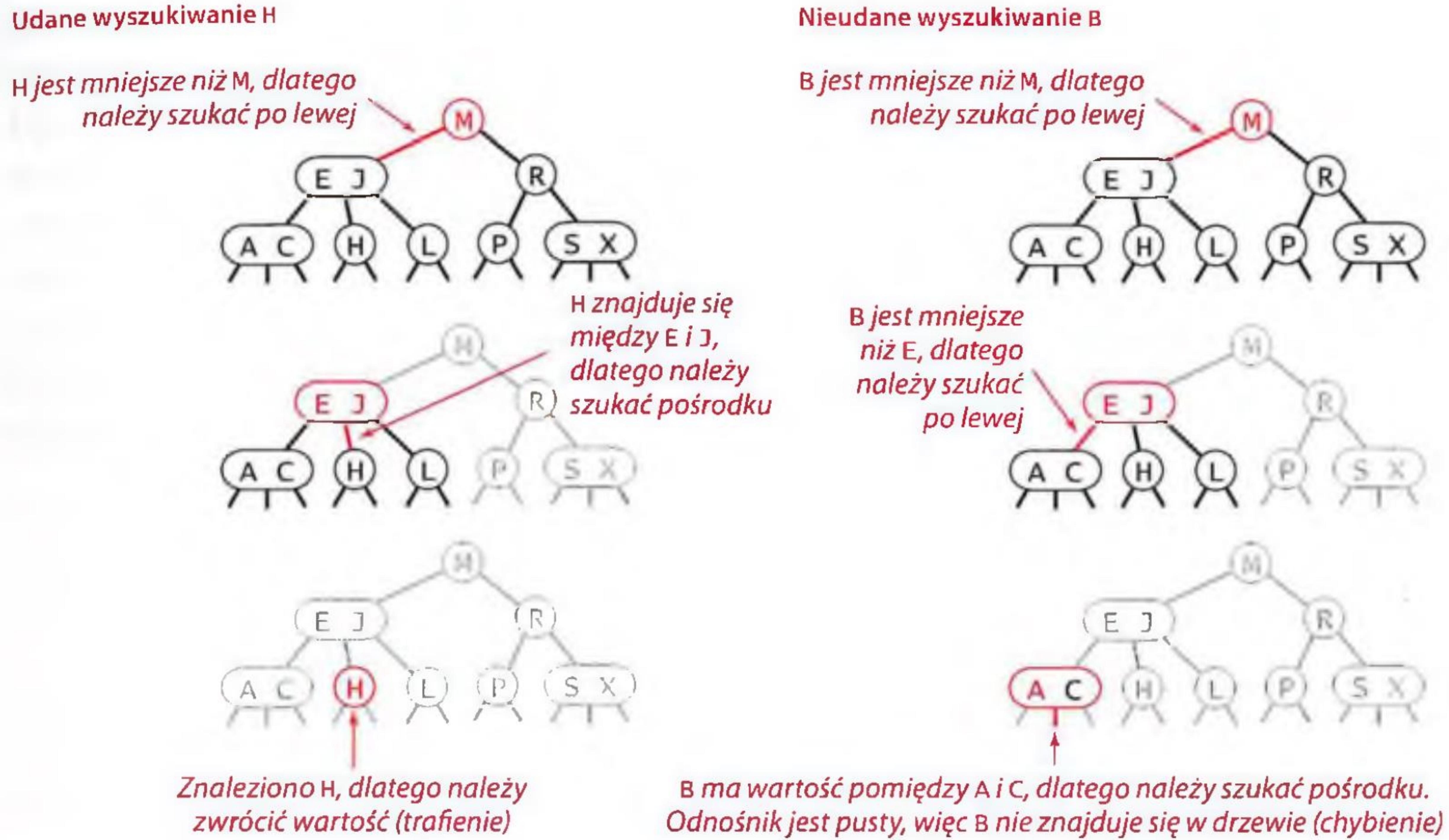
■ węzłem potrójnym — o dwóch kluczach oraz trzech odnośnikach;
lewy prowadzi do drzewa wyszukiwań 2-3 z mniejszymi kluczami,
środkowy do drzewa wyszukiwań 2-3 z kluczami o wartościach pomiędzy wartościami kluczy z węzła,
a prawy — do drzewa wyszukiwań 2-3 z większymi kluczami.

Uwaga

W pełni zbalansowane drzewo wyszukiwań 2-3 ma wszystkie puste odnośniki w takiej samej odległości od korzenia.

Aby zachować zwięzłość, nazwy drzewo 2-3 używamy do określania w pełni zbalansowanego drzewa wyszukiwań 2-3


Węzeł
potrójny
Węzeł podwójny
M
E J
R
A C
H
L
P
S X
Pusty odnośnik


Udane wyszukiwanie H
H jest mniejsze niż M, dlatego należy szukać po lewej
M
E J
R
A C
H
L
P
S X
H znajduje się między E i J, dlatego należy szukać pośrodku
Znaleziono H, dlatego należy zwrócić wartość (trafienie)
Nieudane wyszukiwanie B
B jest mniejsze niż M, dlatego należy szukać po lewej
B jest mniejsze niż E, dlatego należy szukać po lewej
B ma wartość pomiędzy A i C, dlatego należy szukać pośrodku.
Odnośnik jest pusty, więc B nie znajduje się w drzewie (chybienie)

Wstawianie do drzewa 2-3

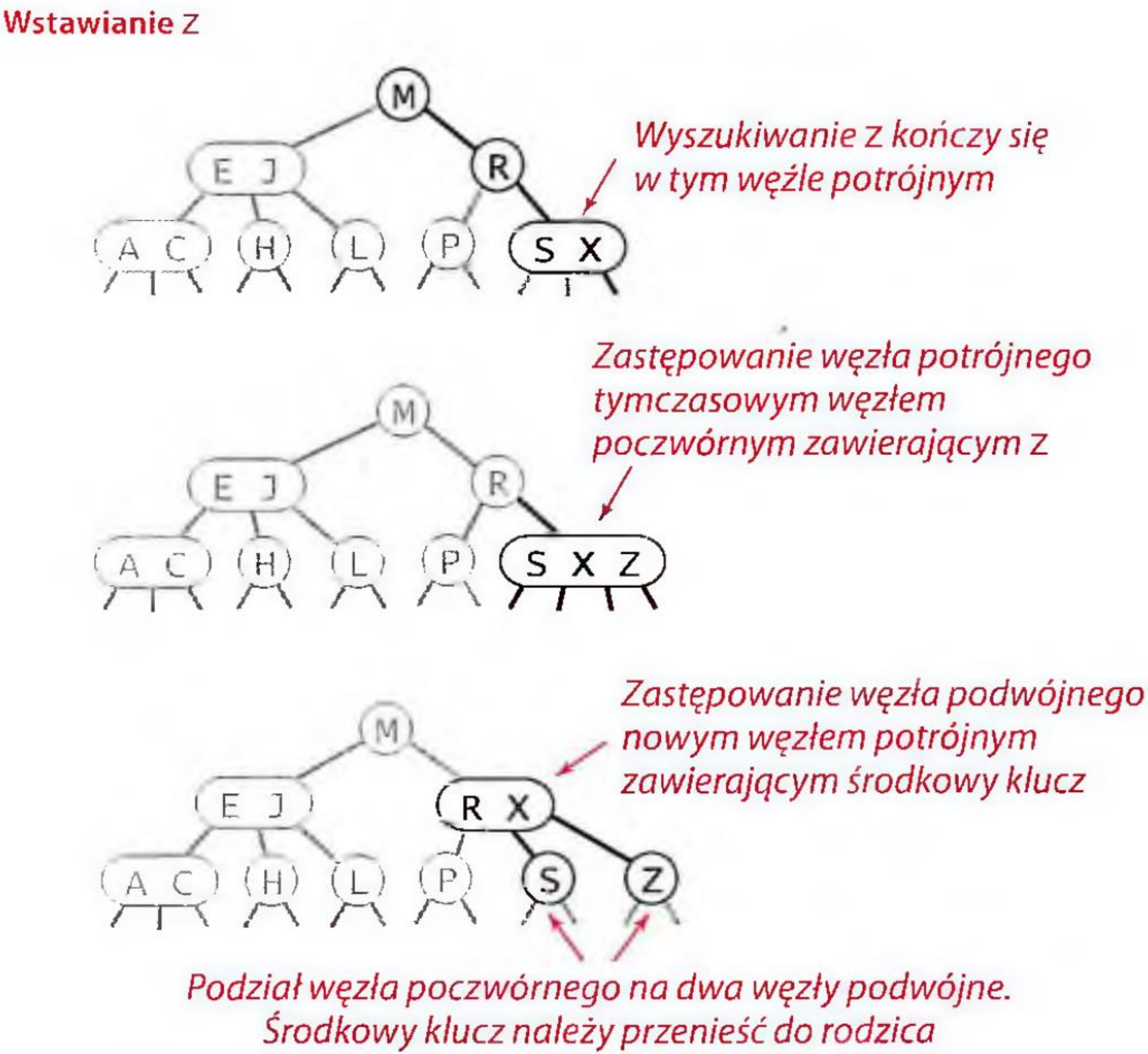
Aby wstawić nowy węzeł w drzewie 2-3, można wykonać nieudane wyszukiwanie, a następnie dodać wartość na dole drzewa, tak jak w drzewach BST. Jednak wtedy nowe drzewo przestaje być w pełni zbalansowane.

Głównym powodem przydatności drzew 2-3 jest to, że można wstawiać dane i zachować pełne zbalansowanie.

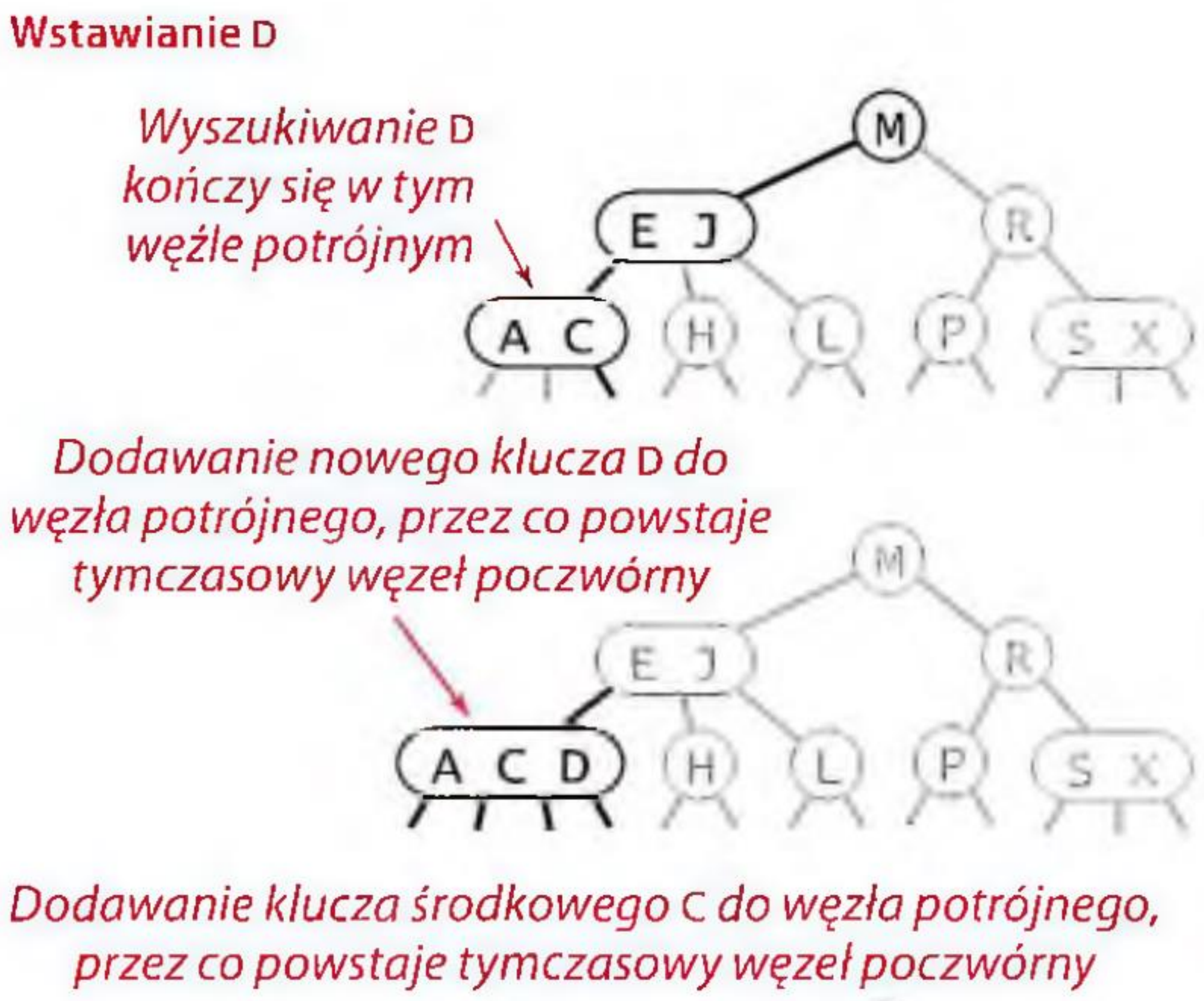
Wstawianie do węzła podwójnego

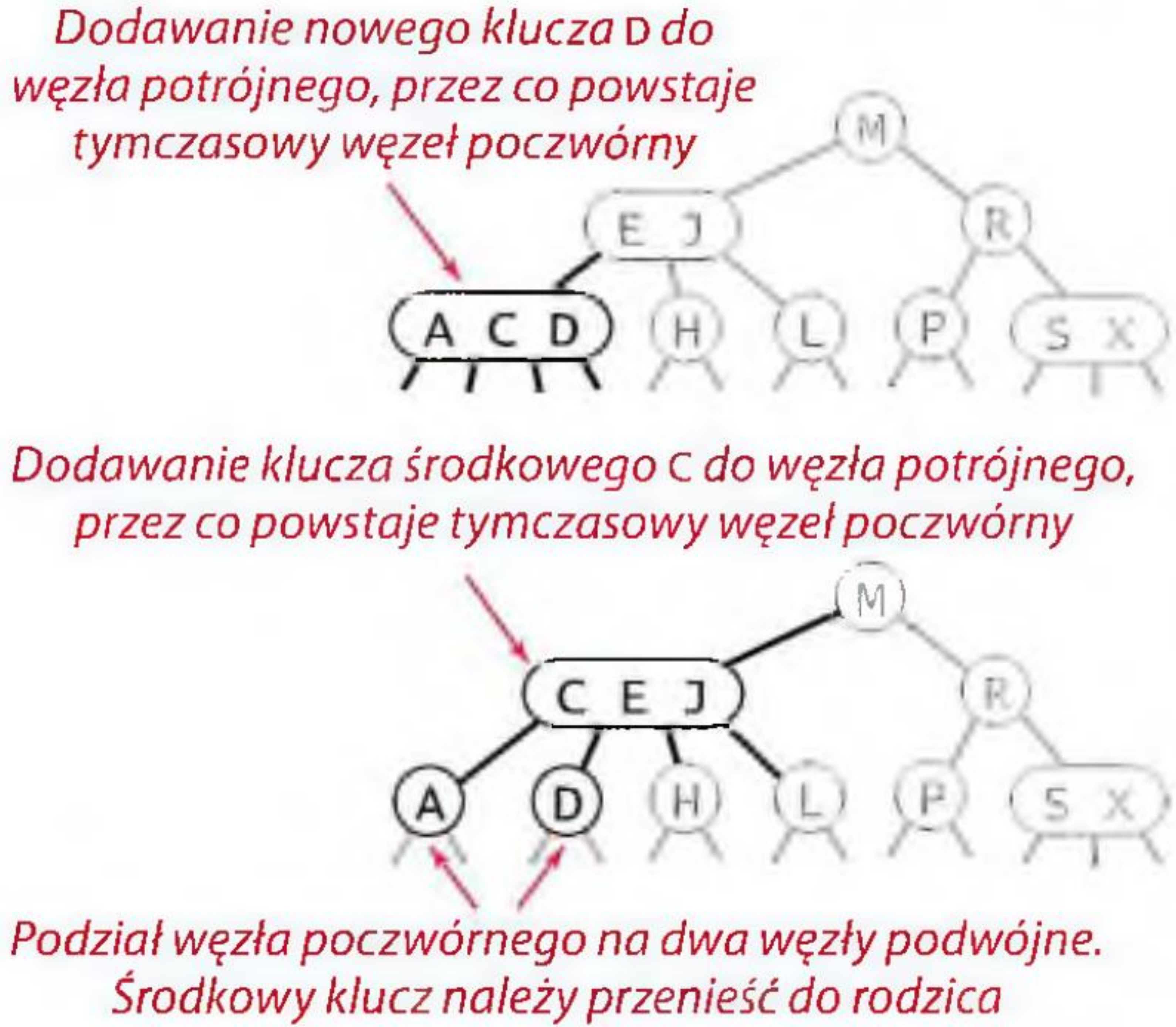
Wstawianie do drzewa składającego się z jednego węzła potrójnego

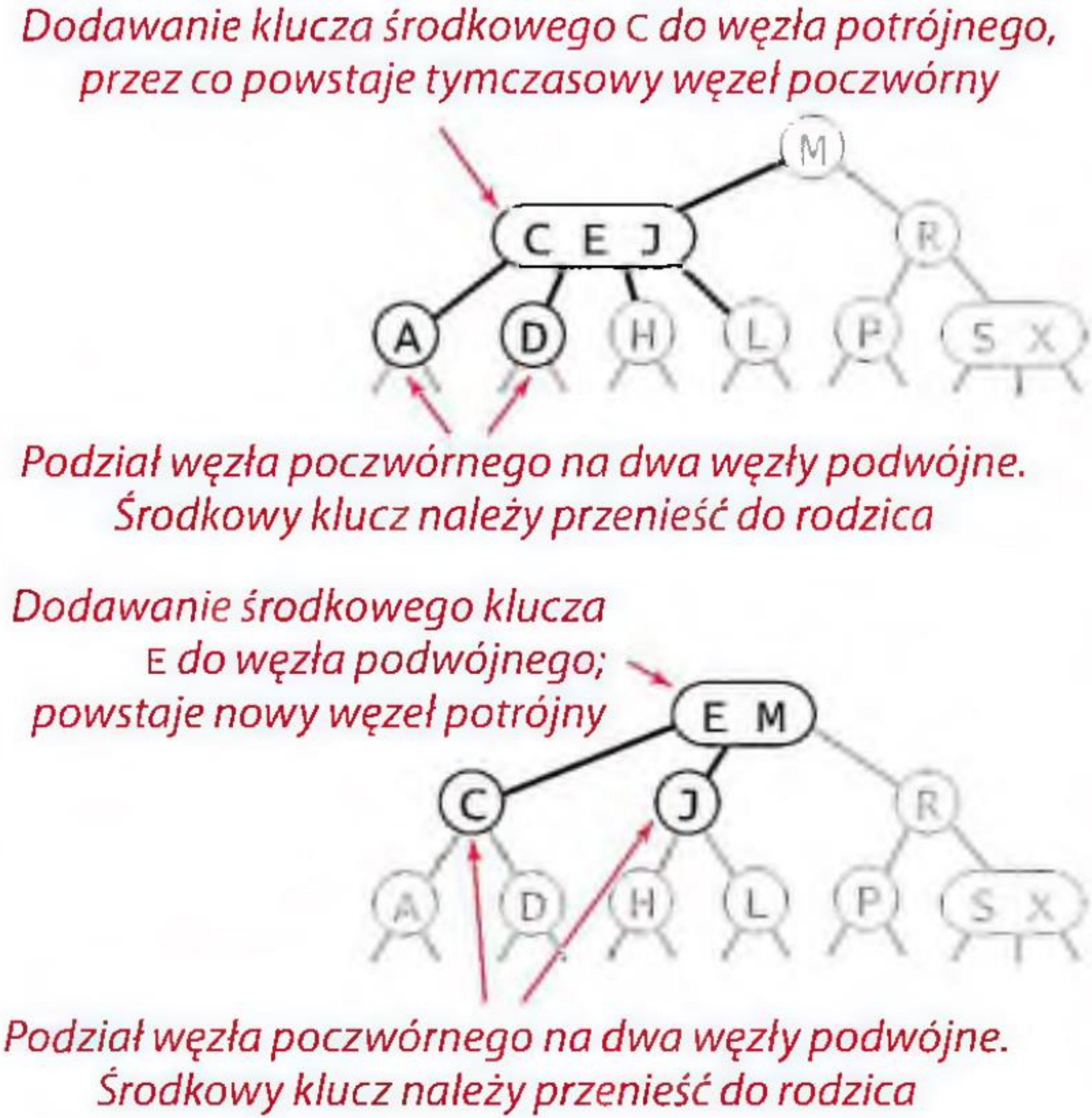
Wstawianie do węzła potrójnego, którego rodzicem jest węzeł podwójny



Wstawianie do węzła potrójnego, którego rodzicem jest węzeł potrójny



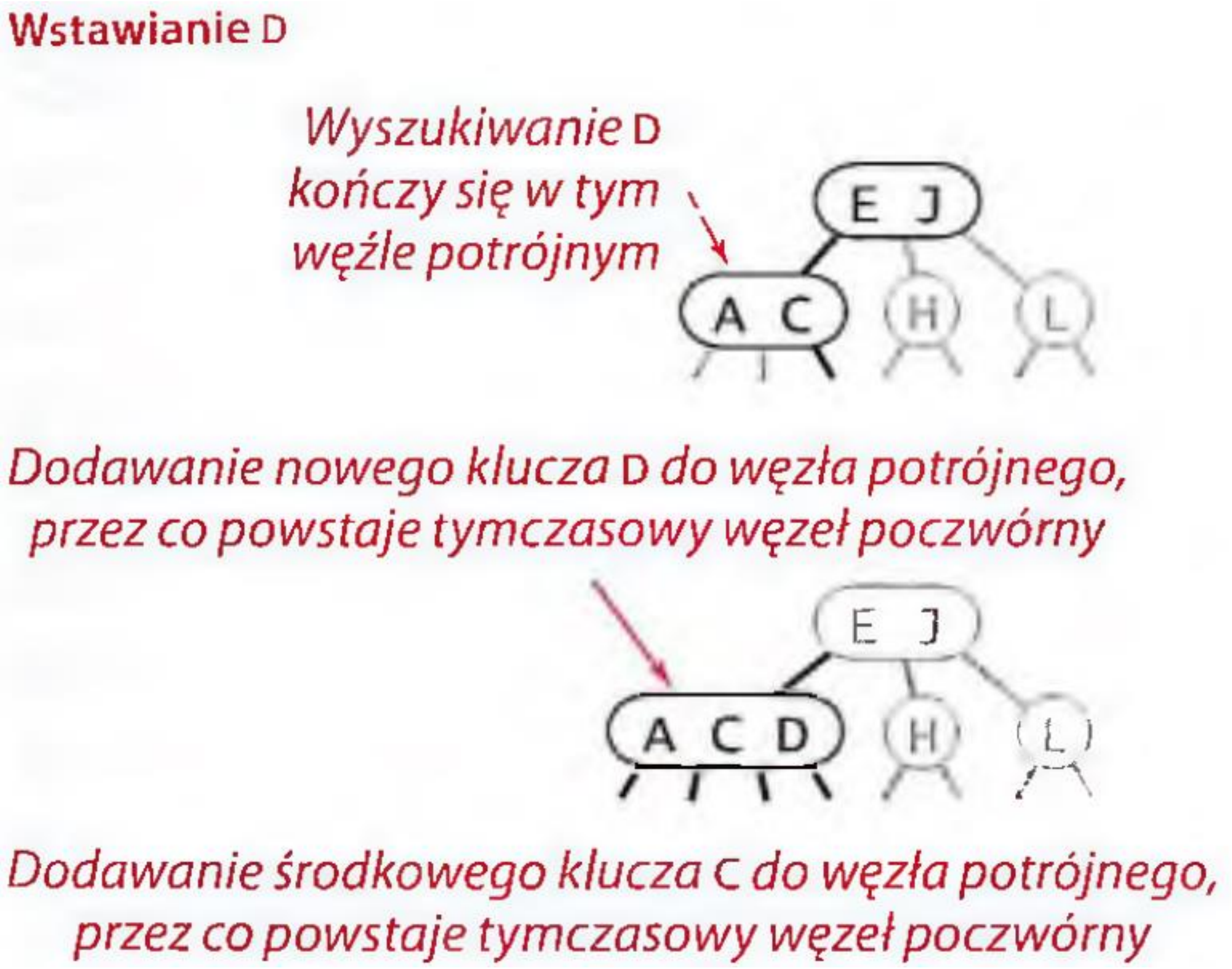

Dodawanie nowego klucza D do
węzła potrójnego, przez co powstaje
tymczasowy węzeł poczwórny
M
E J
R
A C D
H
L
P
S X
Dodawanie klucza środkowego C do węzła potrójnego,
przez co powstaje tymczasowy węzeł poczwórny
M
C E J
R
A
D
H
L
P
S X
Podział węzła poczwórnego na dwa węzły podwójne.
Środkowy klucz należy przenieść do rodzica


Dodawanie klucza środkowego C do węzła potrójnego,
przez co powstaje tymczasowy węzeł poczwórny
M
C E J
R
A
D
H
L
P
S X
Podział węzła poczwórnego na dwa węzły podwójne.
Środkowy klucz należy przenieść do rodzica
Dodawanie środkowego klucza
E do węzła podwójnego;
powstaje nowy węzeł potrójny
E M
C
J
R
A
D
H
L
P
S X
Podział węzła poczwórnego na dwa węzły podwójne.
Środkowy klucz należy przenieść do rodzica

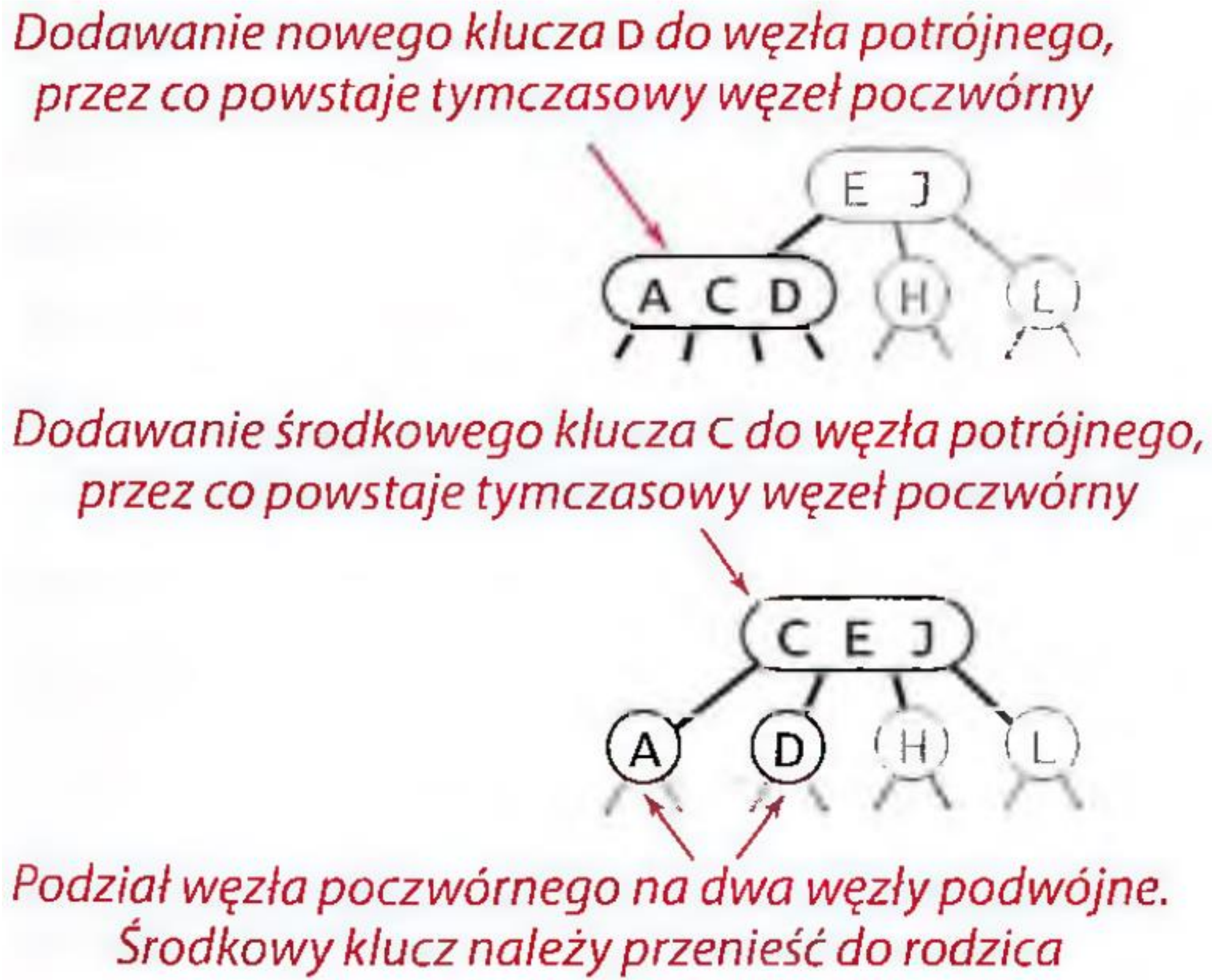
W ogólności:

Poruszamy się w górę drzewa, dzieląc węzły poczwórne i wstawiając ich środkowe klucze do rodziców do momentu natrafienia na węzeł podwójny (zastępujemy go węzłem potrójnym, którego nie trzeba dalej dzielić) lub na węzeł potrójny będący korzeniem.

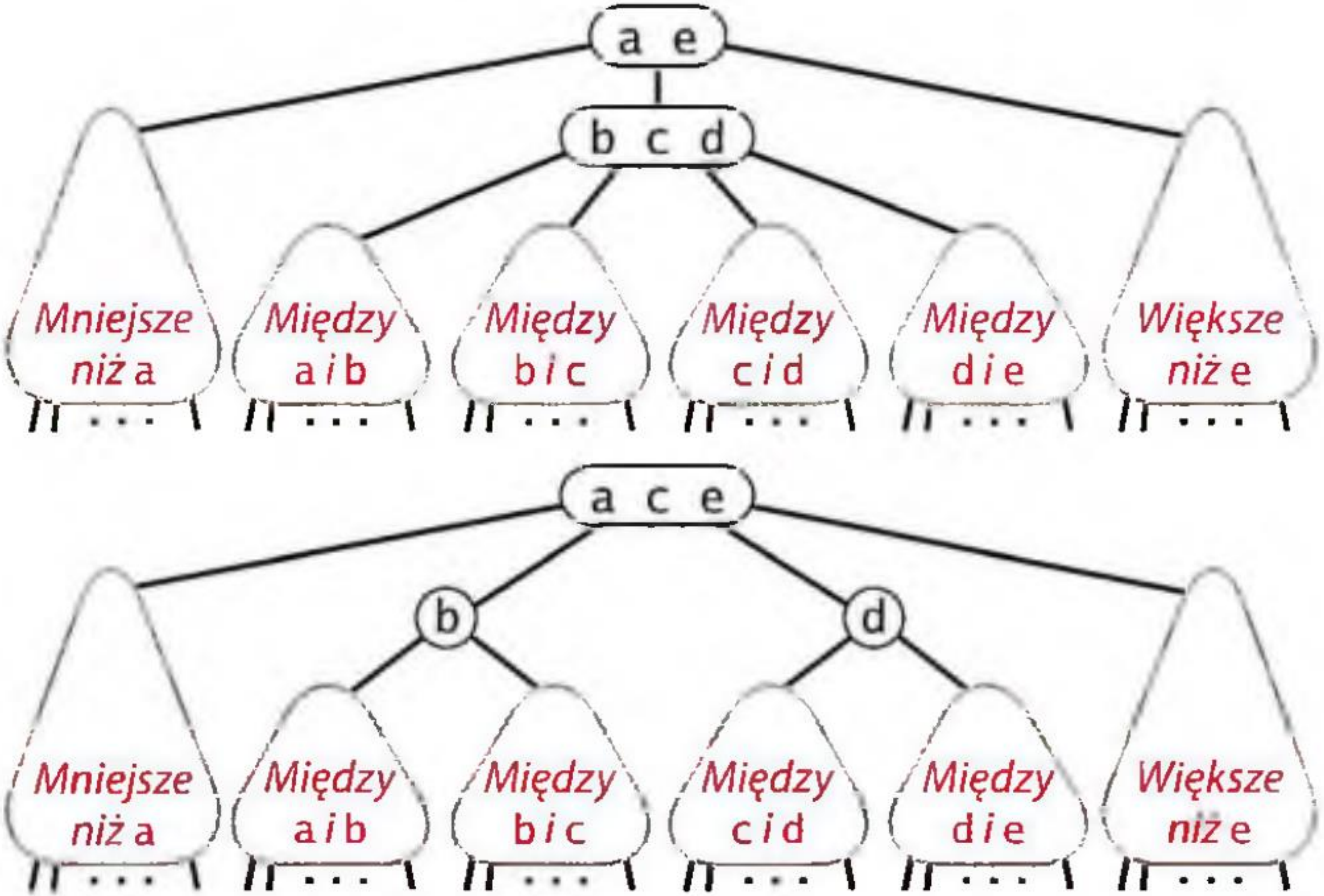
Podział korzenia



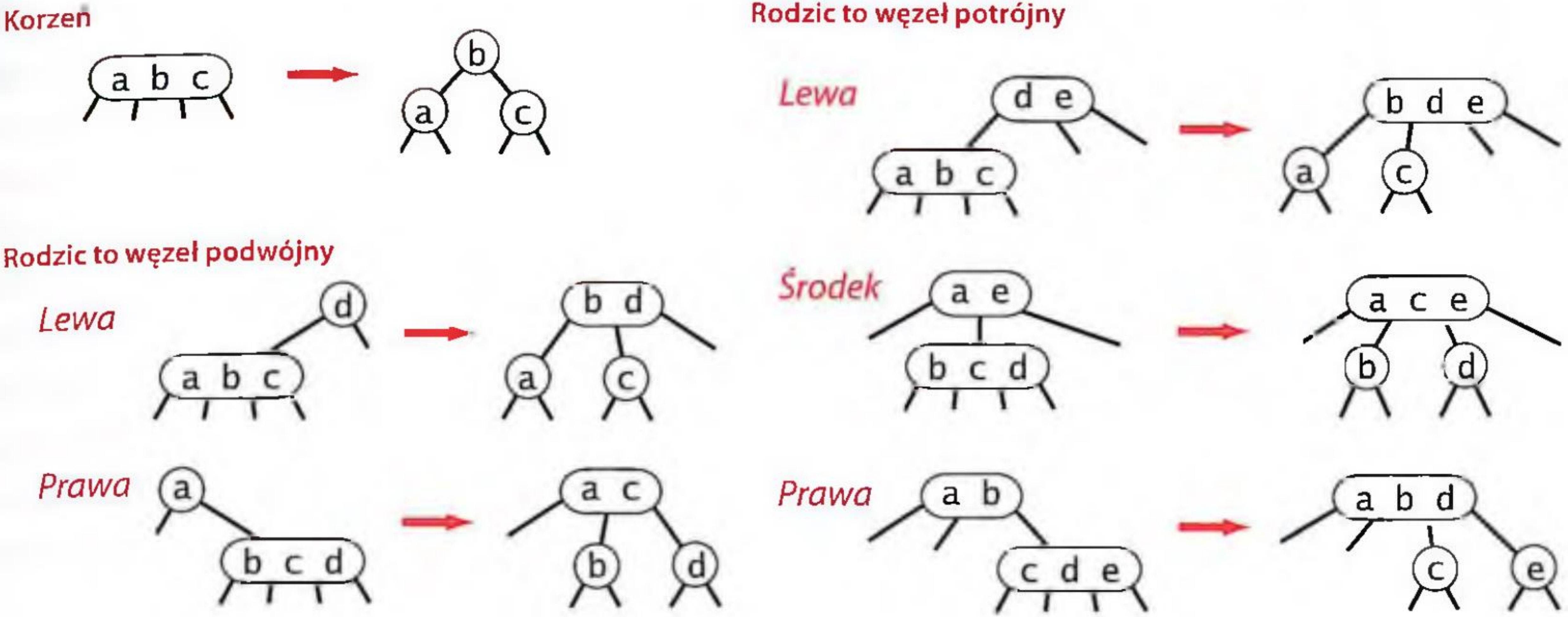
Podział korzenia



Podział korzenia



Podział węzła poczwórnego to lokalna transformacja zachowująca kolejność i pełne zbalansowanie



Podział tymczasowego węzła poczwórnego na drzewo 2-3 (podsumowanie)

Zadanie – wstawianie do drzewa 2-3

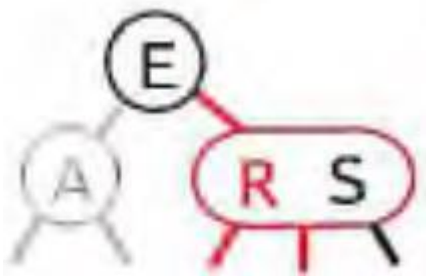
- Zaczynając od pustego drzewa 2-3 wstaw do niego kolejno elementy: S, E, A, R, C, H, X, M, P, L.
- Narysuj drzewo po wstawieniu każdej litery.

S

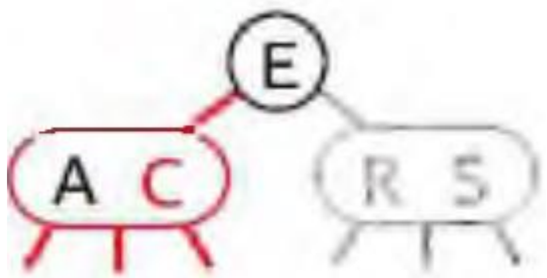
E

A

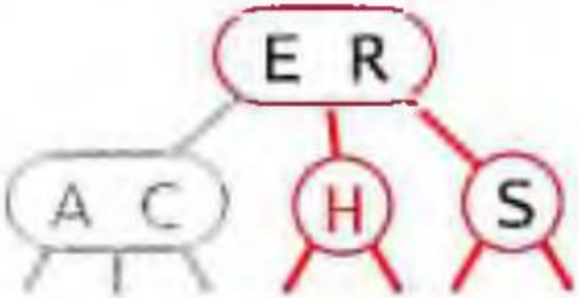
R



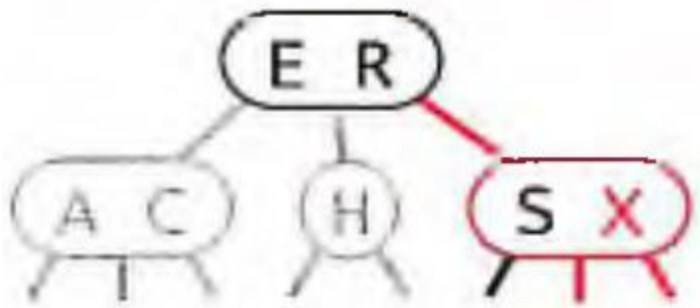
C



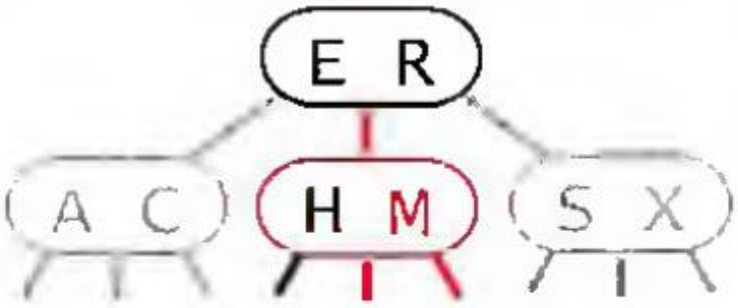
H



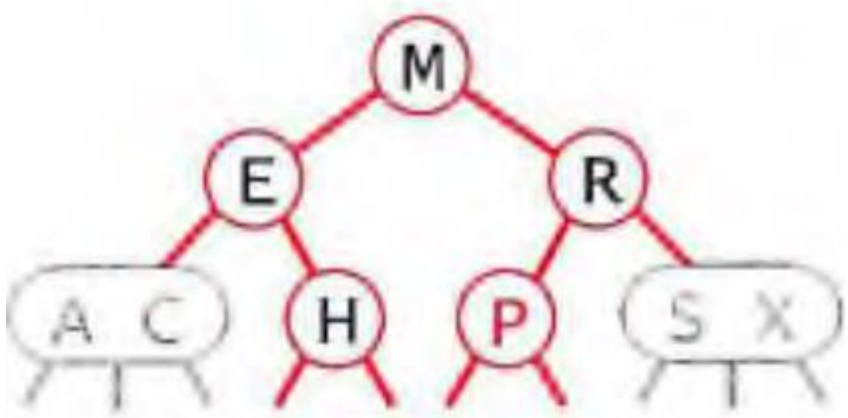
X



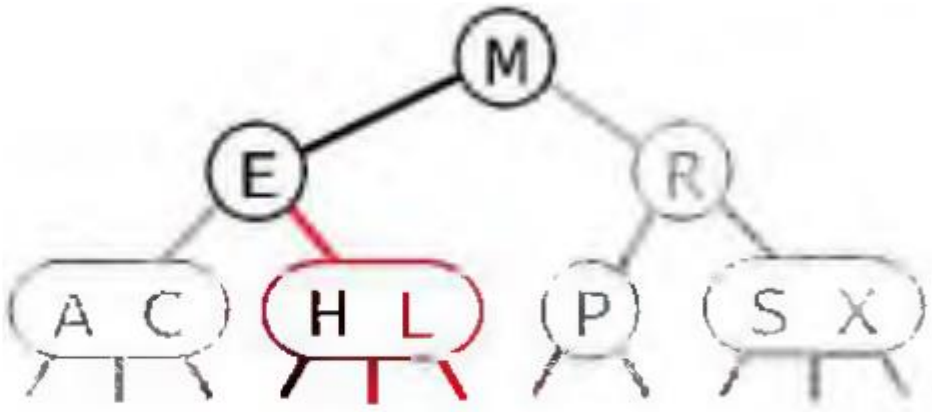
M



P



L



Zadanie – wstawianie uporządkowanych kluczy do drzewa 2-3

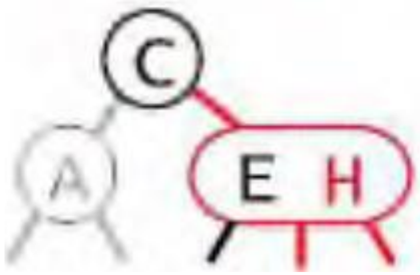
- Zaczynając od pustego drzewa 2-3 wstaw do niego kolejno elementy: A, C, E, H, L, M, P, R, S, X (te same klucze co wcześniej, ale w kolejności rosnącej)
- Narysuj drzewo po wstawieniu każdej litery.

A

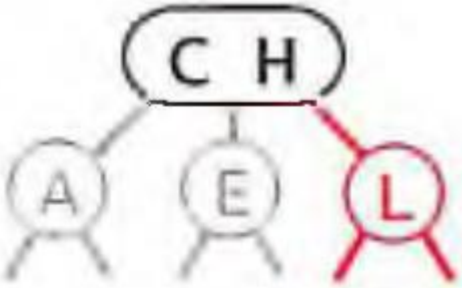
C

E

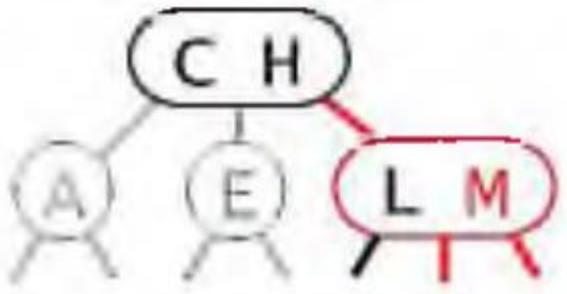
H



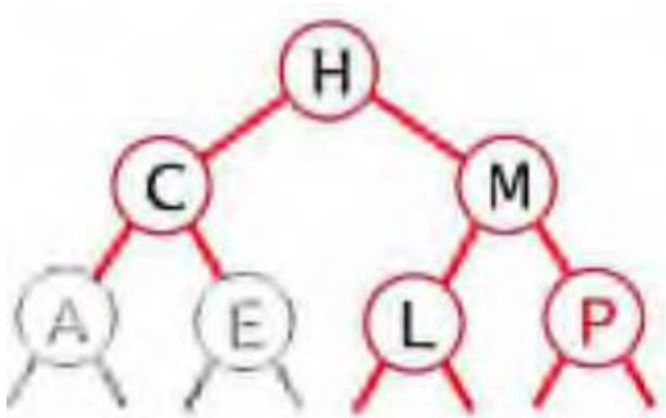
L



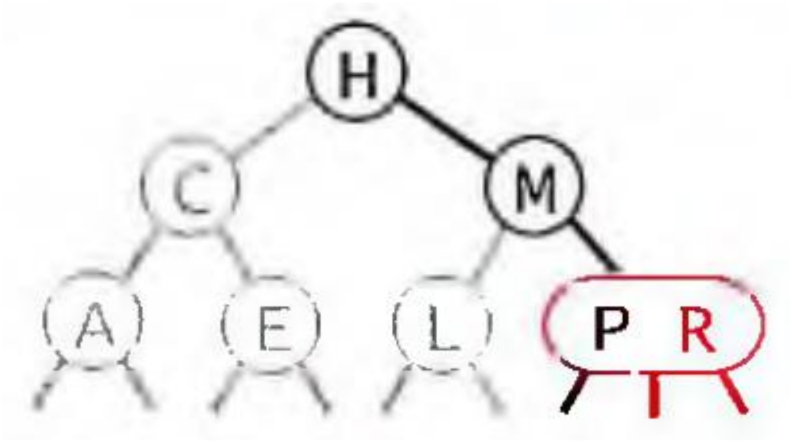
M



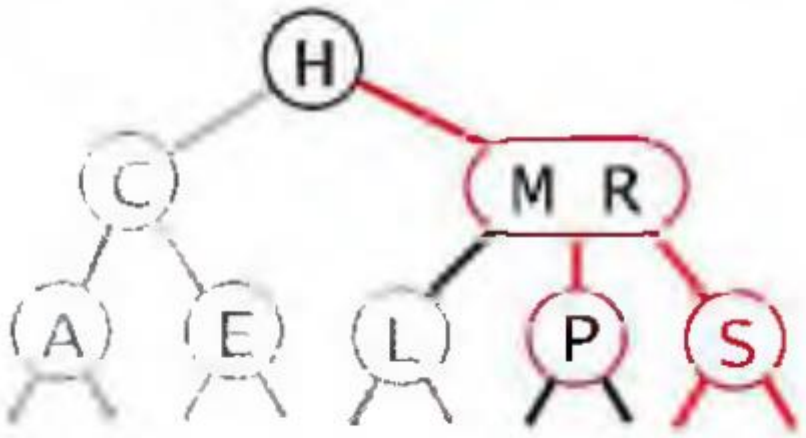
P



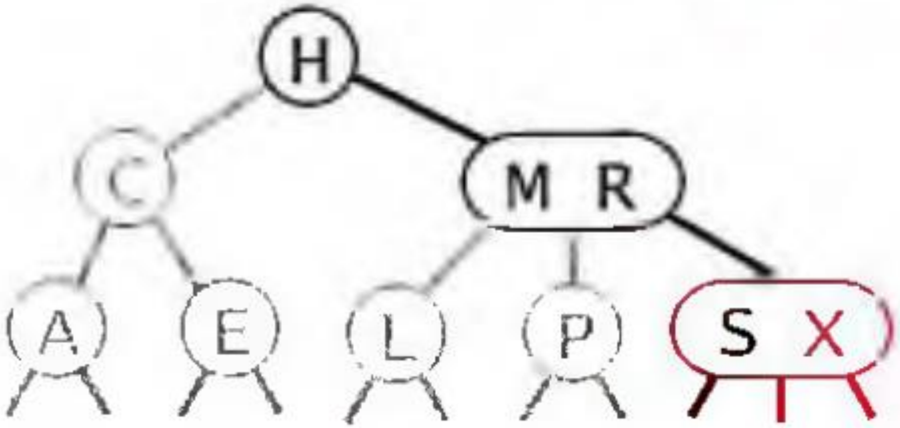
R



S



X

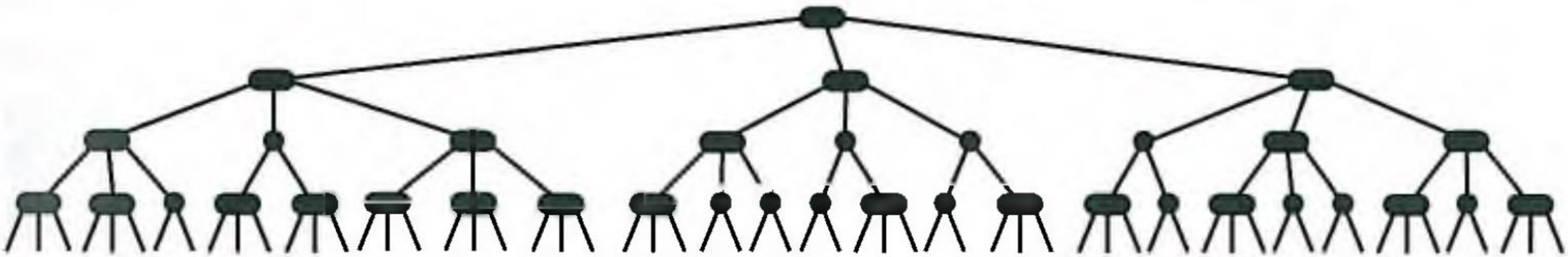


Wniosek

Ilość czasu potrzebnego w każdym węźle na wykonanie poszczególnych operacji jest ograniczona stałą.

Operacja wyszukiwania i wstawiania sprawdza węzły tylko na jednej ścieżce od korzenia do liścia i z powrotem od liścia do korzenia.

Łączny koszt każdego wstawiania będzie logarytmiczny.

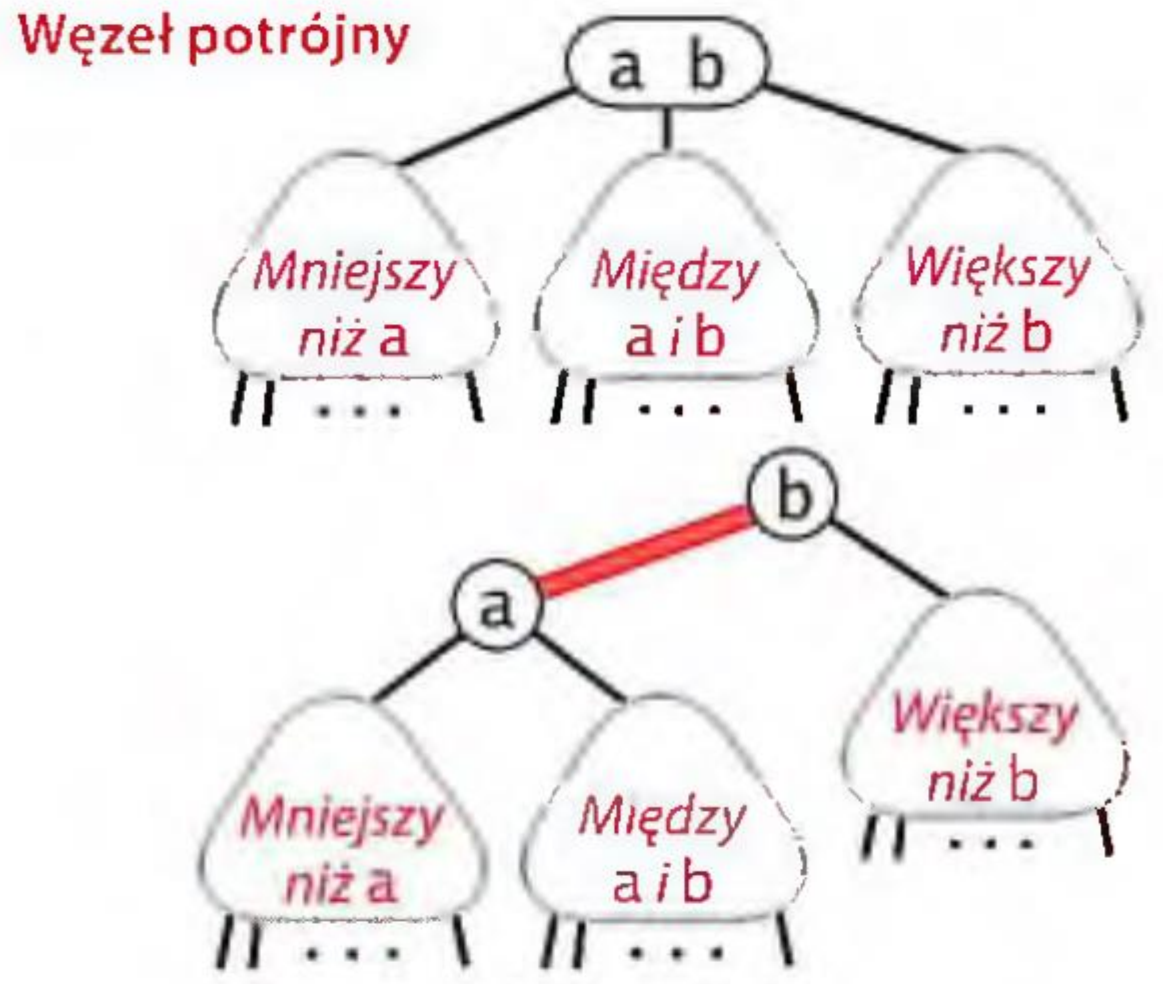


Typowe drzewo 2-3 zbudowane na podstawie losowych kluczy

Implementacja

Można zaimplementować drzewa 2-3, ale zazwyczaj wykorzystujemy inne drzewa, tzw. **Czerwono-czarne drzewa BST (drzewa RB)**

Pomysł



Zapisywanie węzła potrójnego za pomocą dwóch węzłów podwójnych połączonych czerwonym odnośnikiem z lewej strony

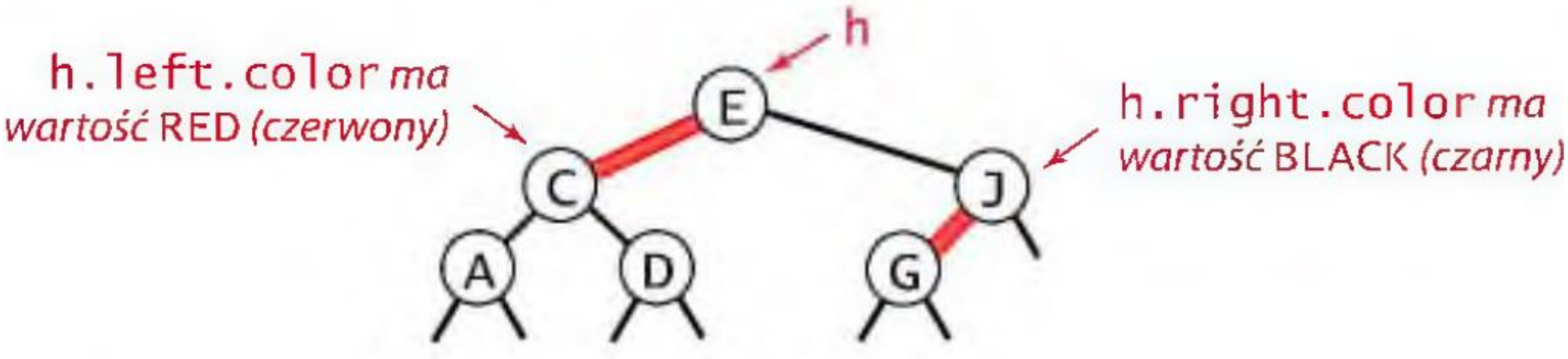
Czerwono-czarne drzewa BST (Sedgewick)

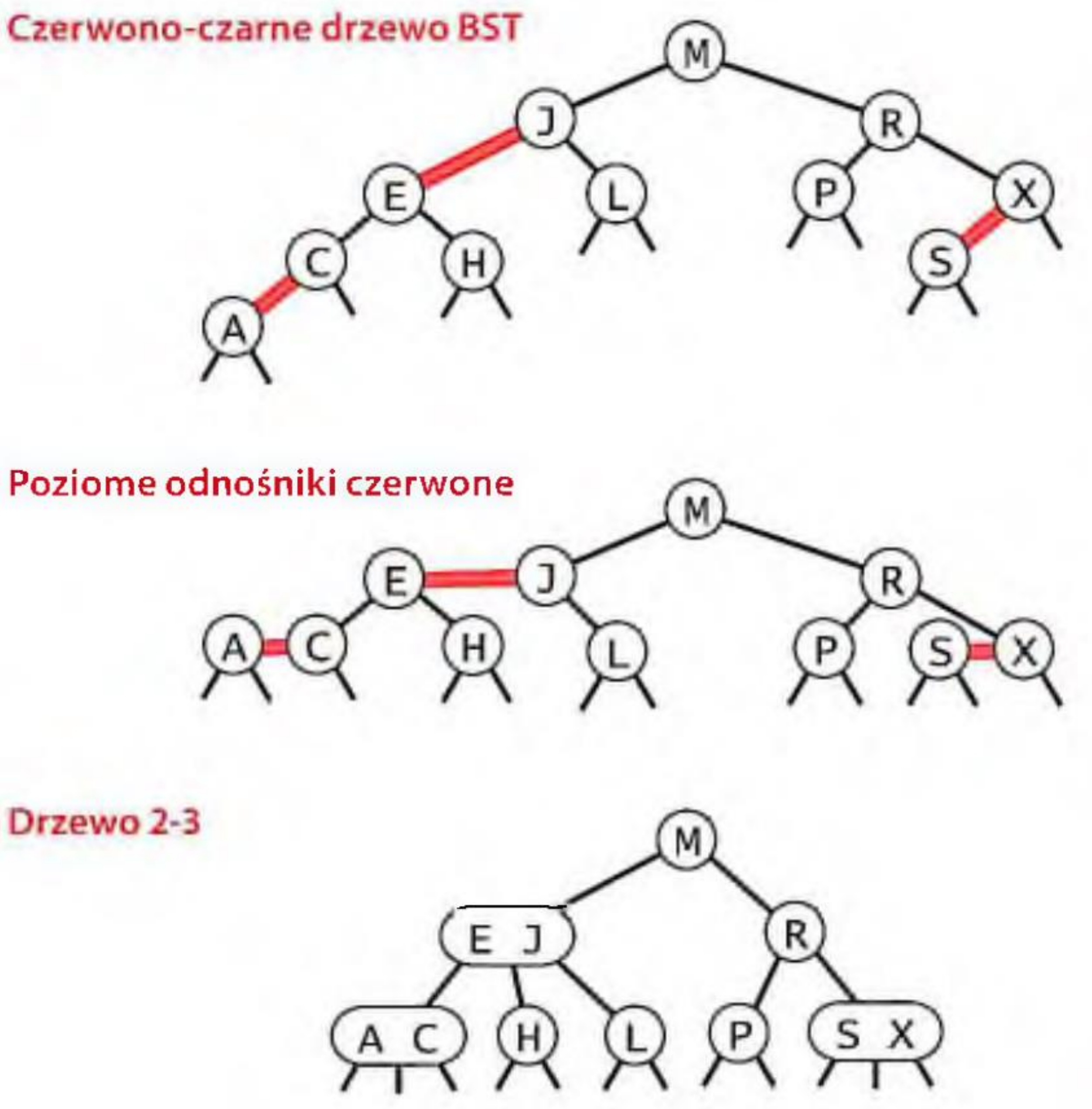
Czerwono-czarne drzewo BST definiujemy jako drzewo BST z czerwonymi i czarnymi odnośnikami, spełniające trzy poniższe warunki:

- Odnośniki czerwone znajdują się po lewej stronie.
- Żaden węzeł nie jest powiązany z dwoma odnośnikami czerwonymi.
- Drzewo jest w pełni zbalansowane ze względu na czarne odnośniki — każda ścieżka z korzenia do pustego odnośnika obejmuje tę samą liczbę czarnych odnośników.

Reprezentacja kolorów

Dla wygody (ponieważ do każdego węzła prowadzi dokładnie jeden odnośnik — z jego rodzica) kolory odnośników zapisujemy w węzłach.

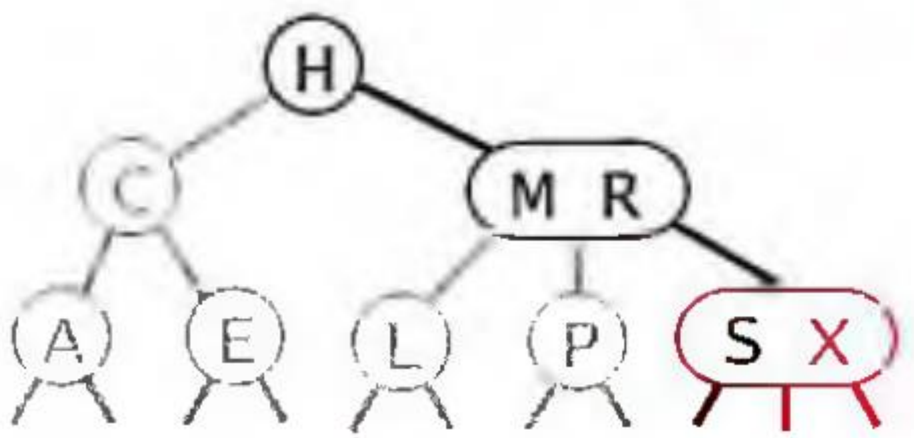




Zależność 1 do 1 między czerwono-czarnymi drzewami BST a drzewami 2-3

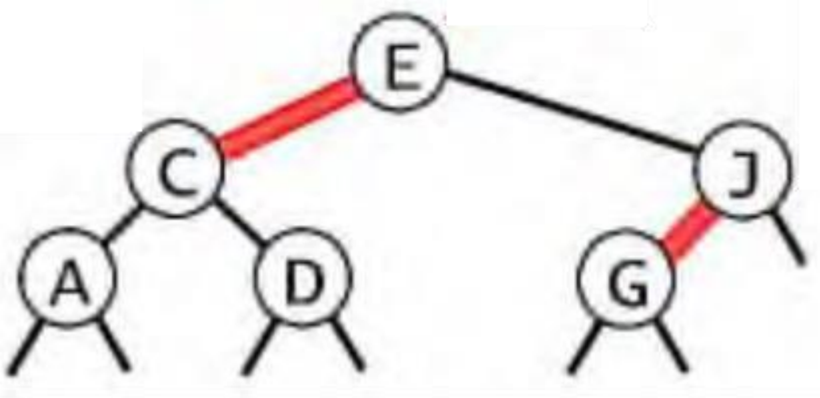
Zadanie (drzewo 2-3 → drzewo RB)

Narysuj drzewo RB odpowiadające poniższemu 2-3 drzewu.



Zadanie (drzewo RB → drzewo 2-3)

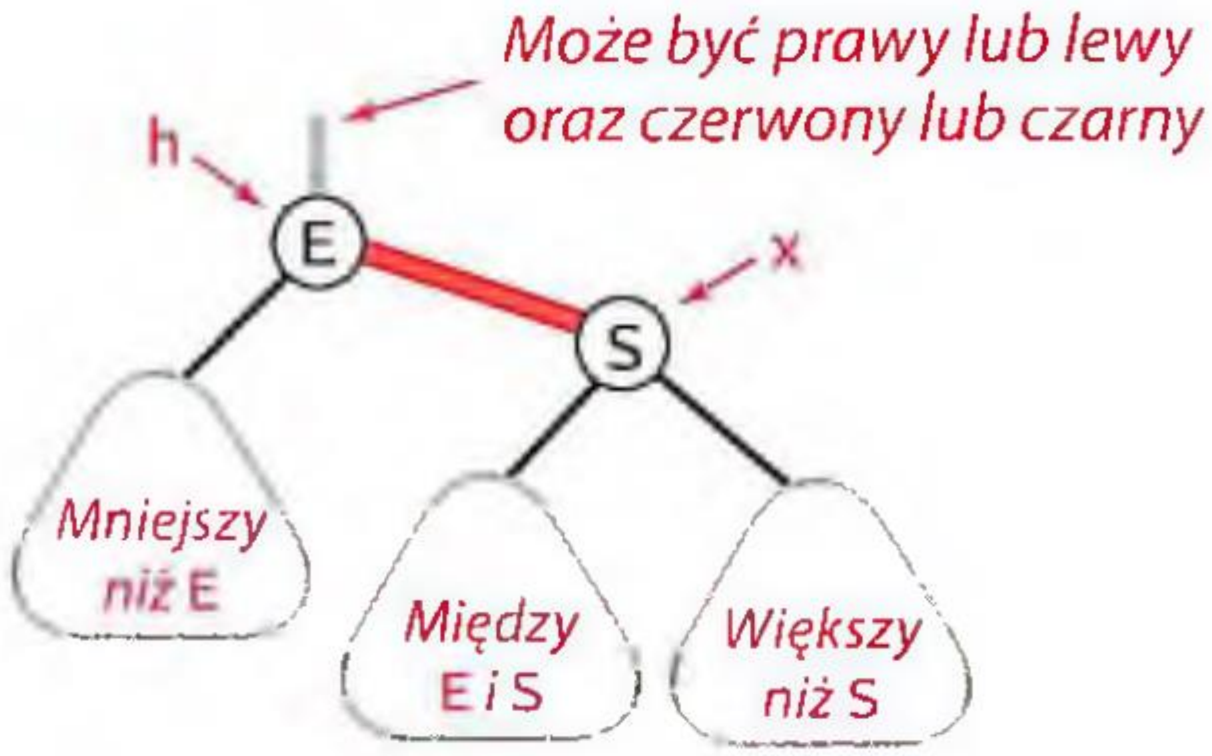
Narysuj drzewo 2-3 odpowiadające poniższemu drzewu RB.

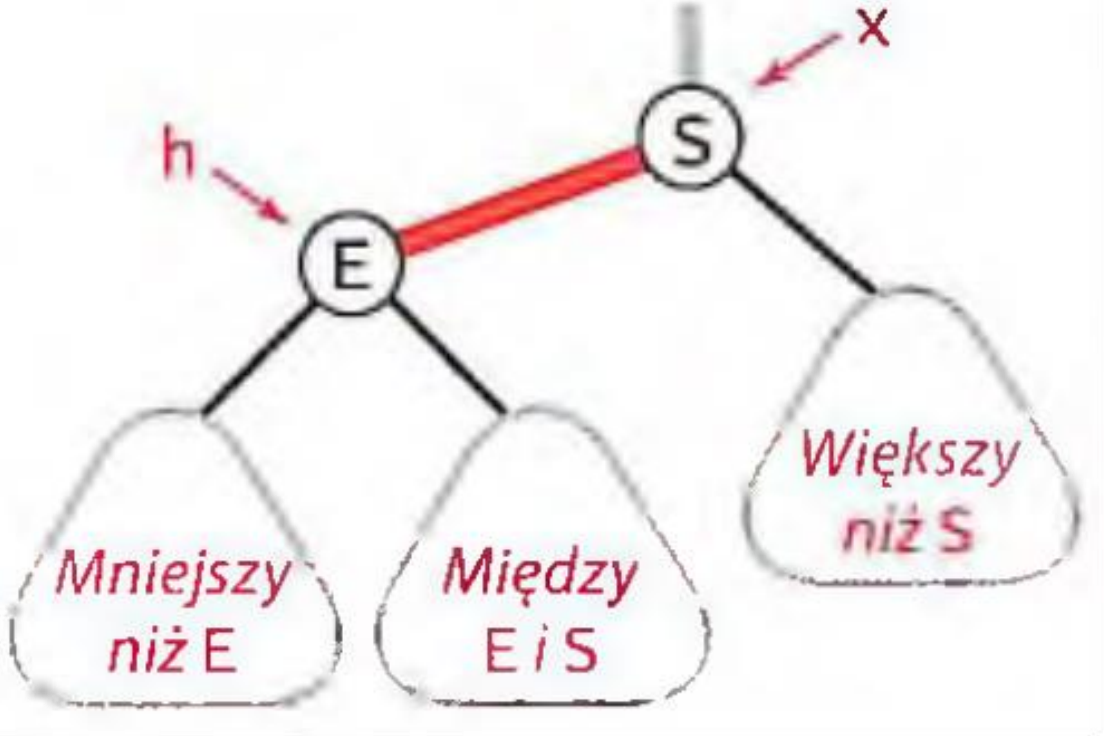


Wyszukiwanie i wstawianie

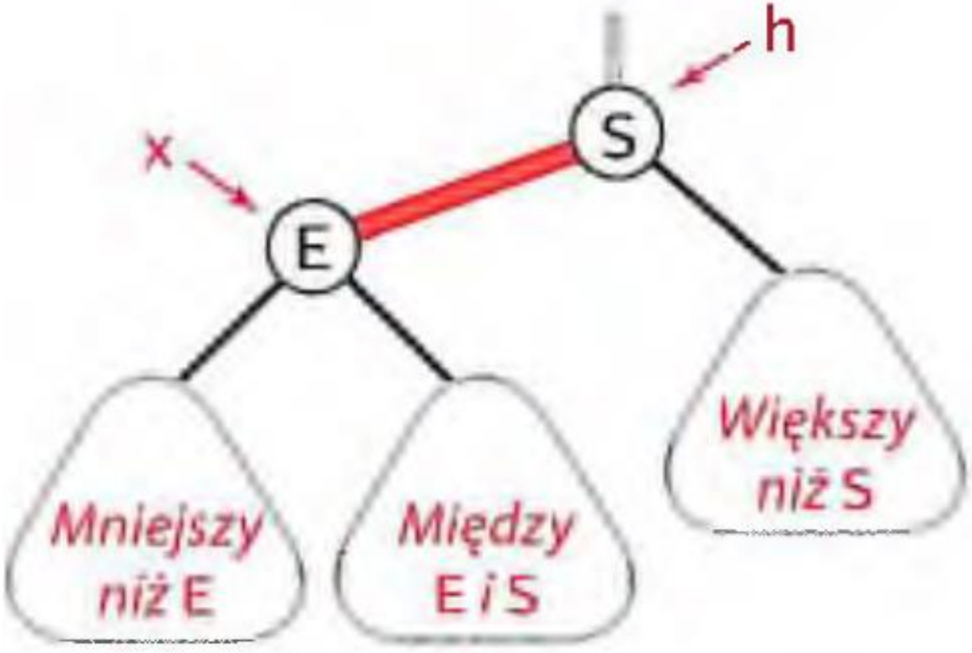
- Jak wyszukiwać w drzewie RB? Tak jak w BST, kolory ignorujemy.
- Jak wstawiać w drzewie RB? Wstawiamy tak jak do drzewa BST używając zawsze czerwonej krawędzi. Następnie używamy pewnych prostych operacji, żeby “naprawić” drzewo.

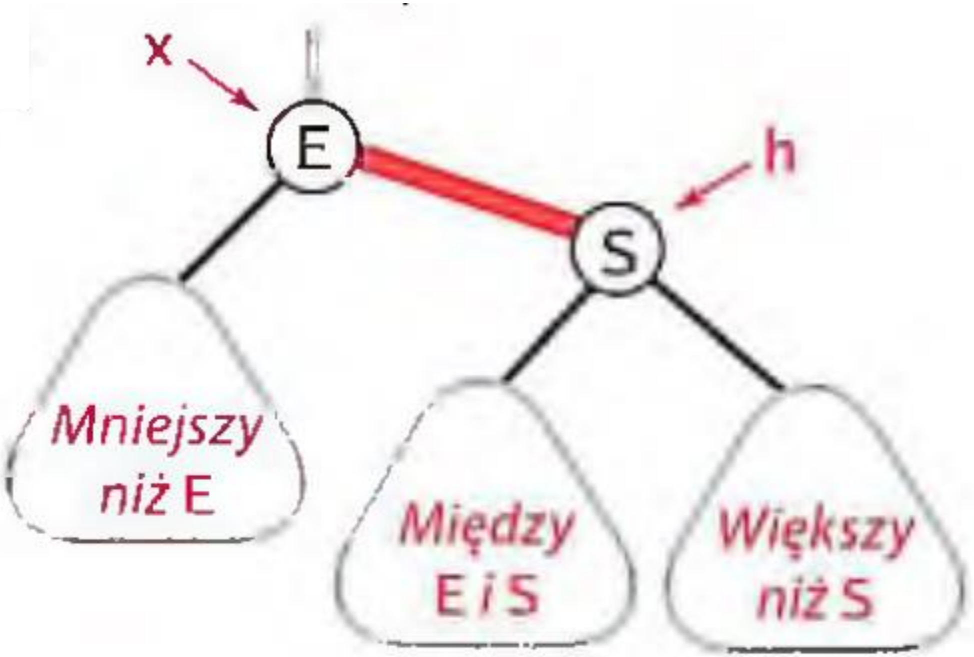
Rotacja w lewo (prawego odnośnika węzła h)



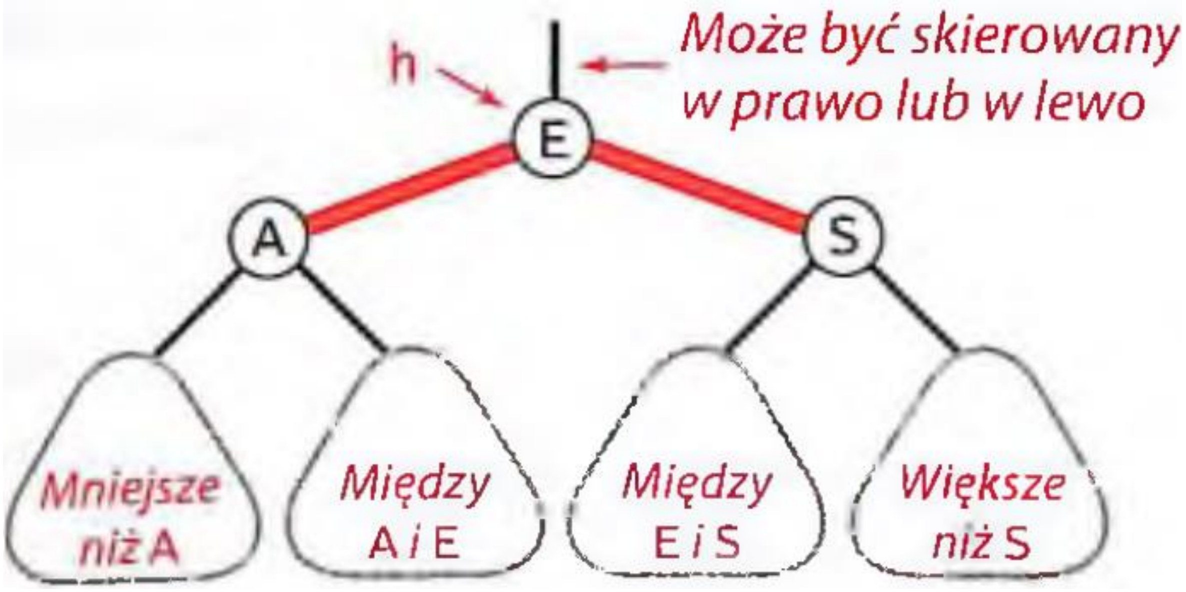


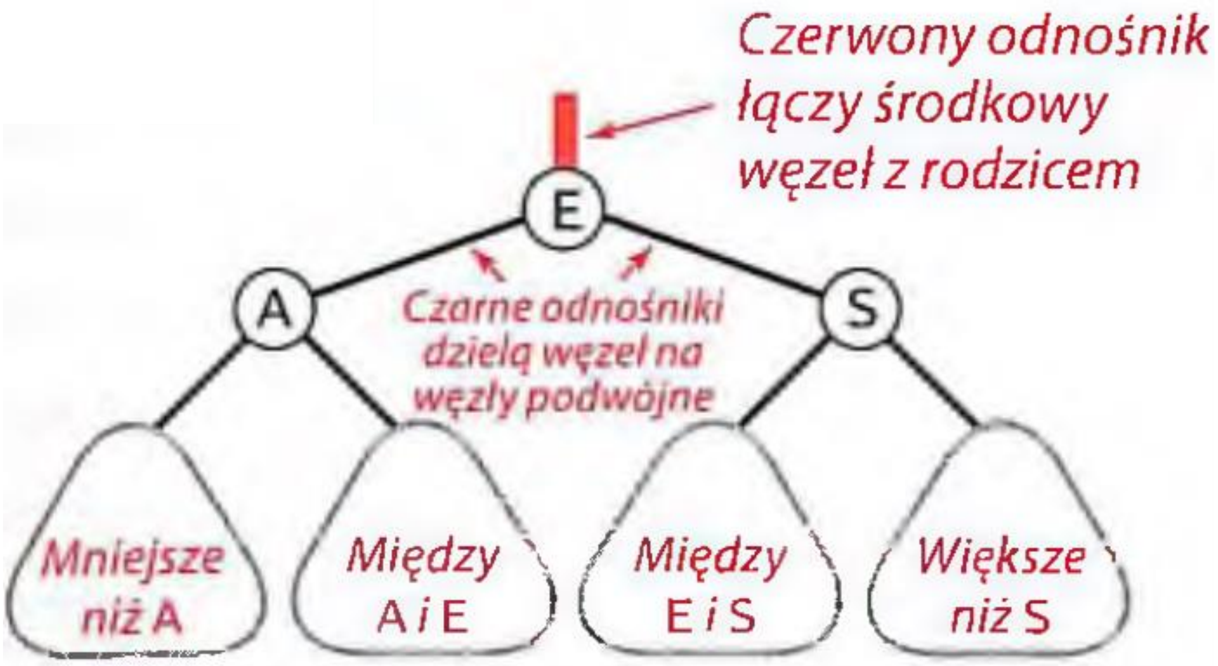
Rotacja w prawo (lewego odnośnika węzła h)





Zmiana kolorów



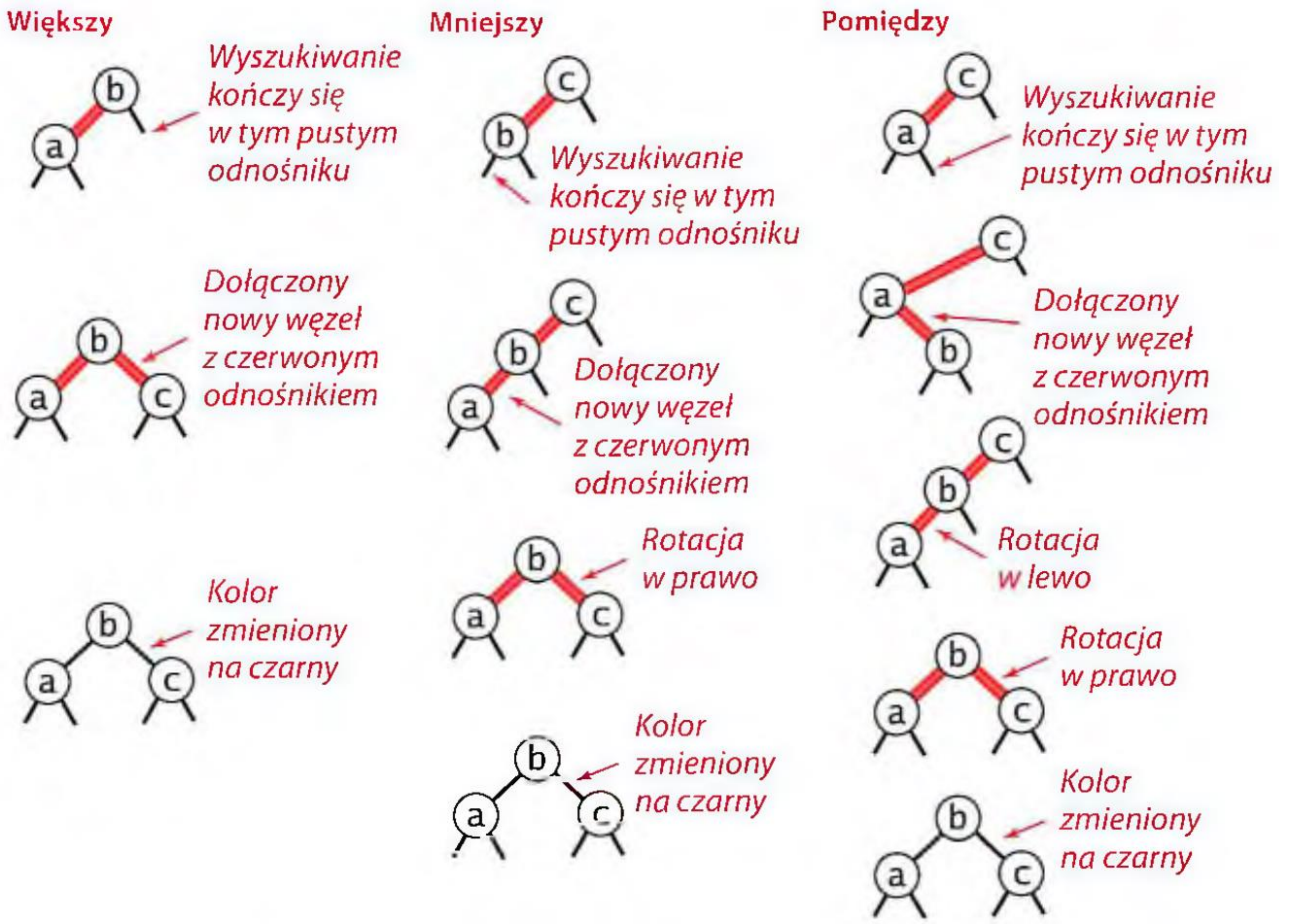


Wstawianie do jednego węzła podwójnego

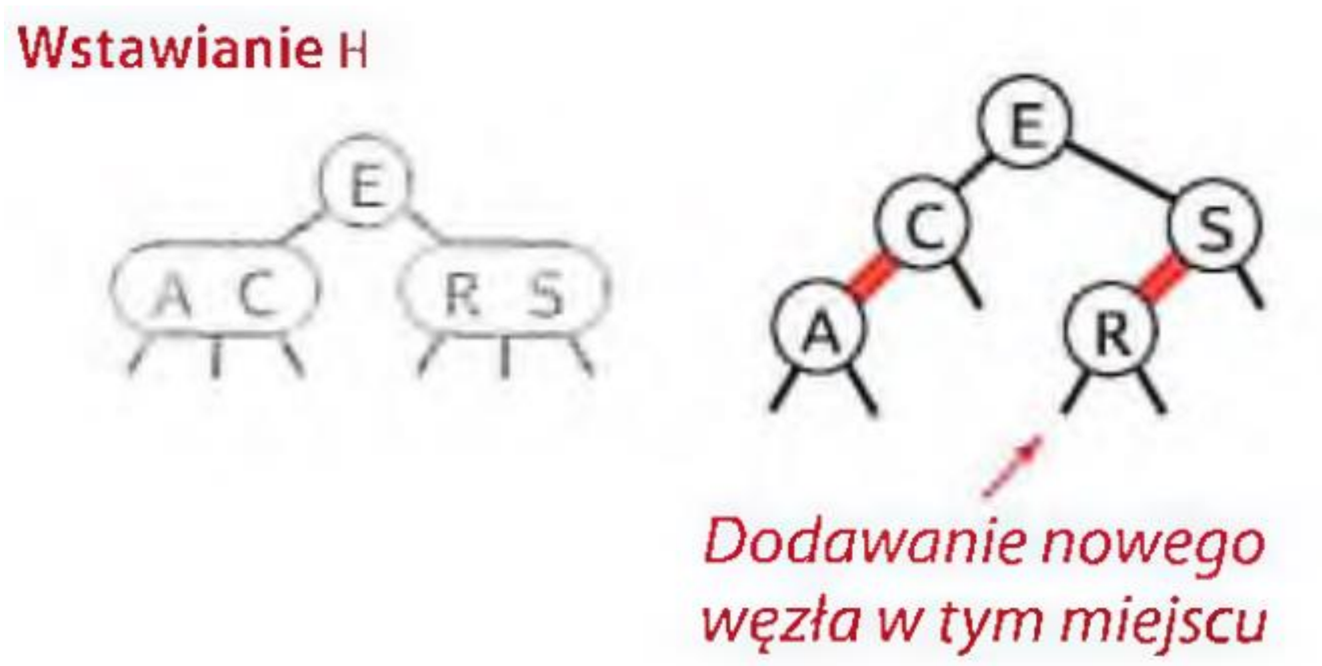
Wstawianie do węzła podwójnego w dolnej części drzewa

Wstawianie do węzła podwójnego na dole drzewa

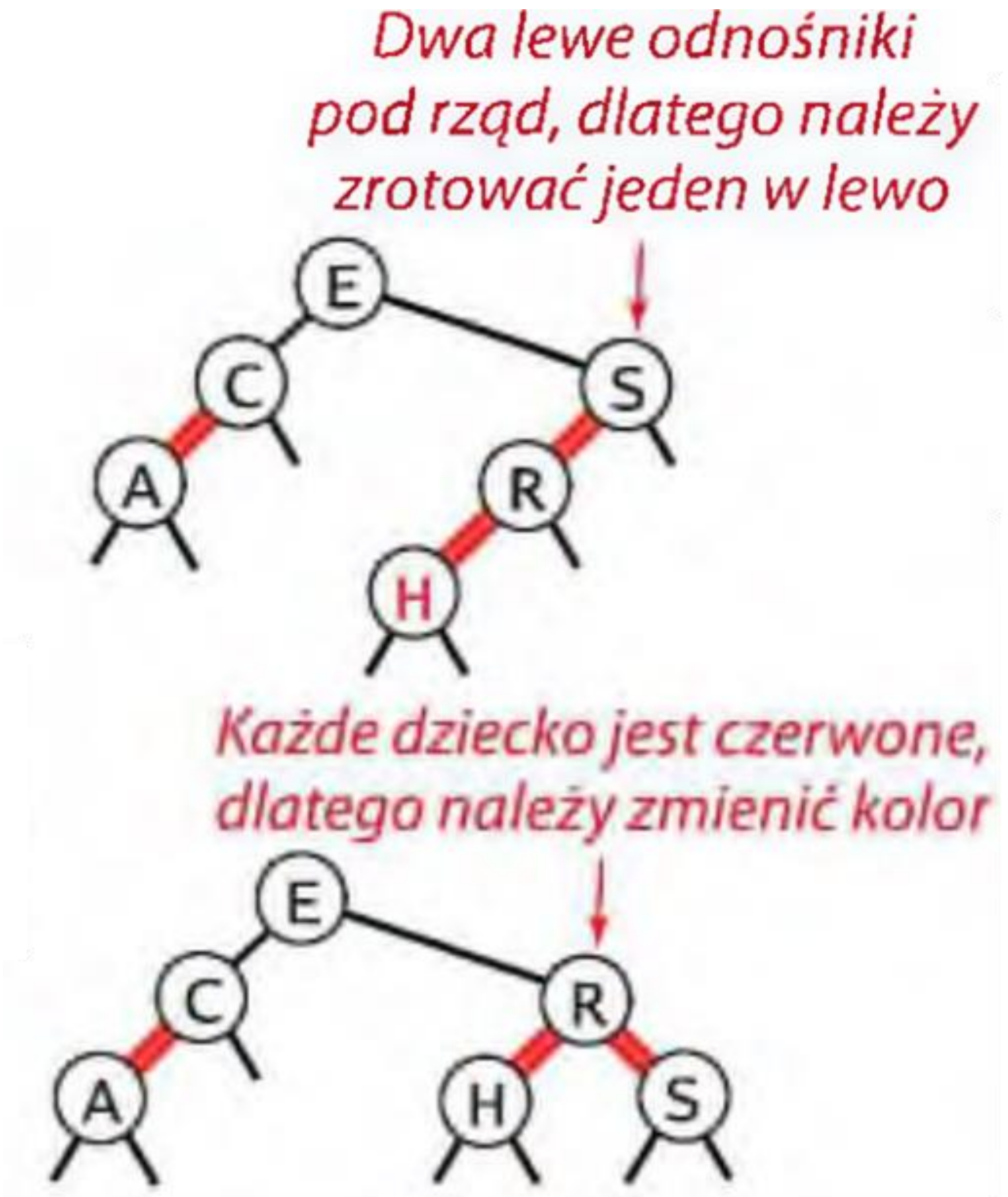
Wstawianie do jednego węzła potrójnego (trzy przypadki)

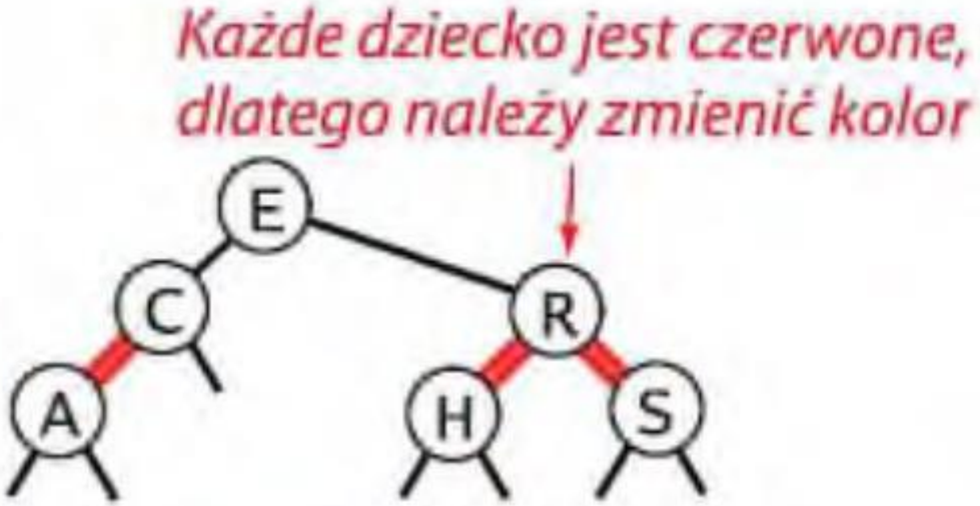


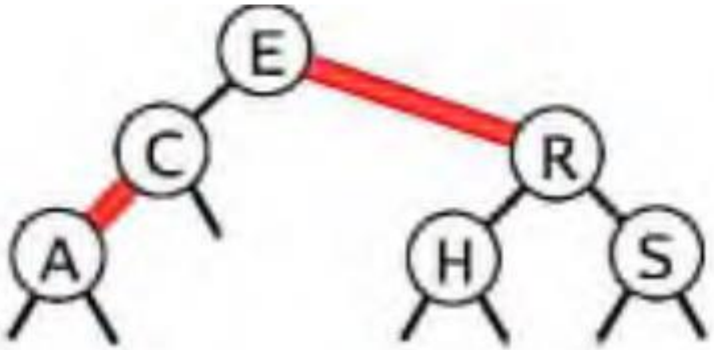
Wstawianie do węzła potrójnego na dole drzewa



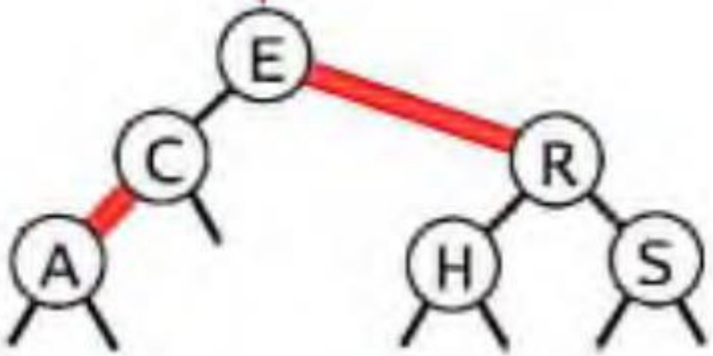

Dwa lewe odnośniki
pod rząd, dlatego należy
zrotować jeden w lewo
E
C
S
A
R
H

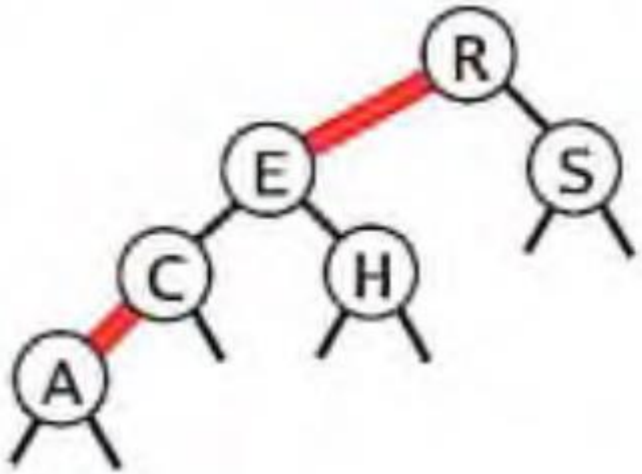

Dwa lewe odnośniki
pod rząd, dlatego należy
zrotować jeden w lewo
E
C
S
A
R
H
Każde dziecko jest czerwone,
dlatego należy zmienić kolor
E
C
R
A
H
S

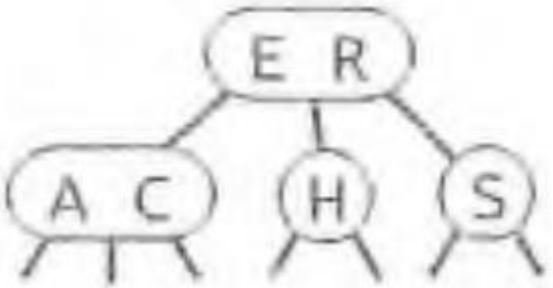

Każde dziecko jest czerwone,
dlatego należy zmienić kolor
E
C
R
A
H
S


E
C
R
A
H
S

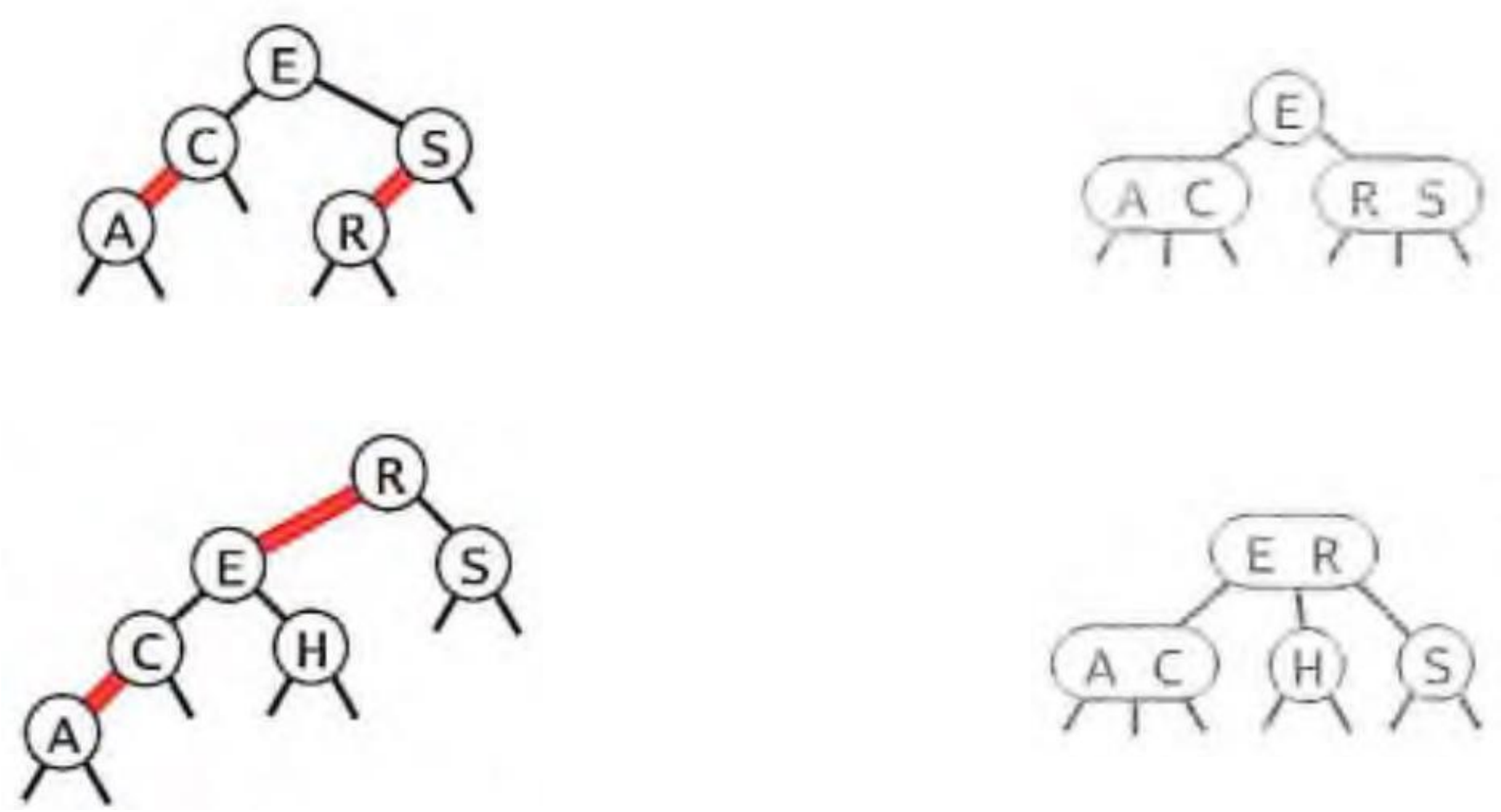
Prawy odnośnik jest czerwony,
dlatego należy zrotować go w lewo







Podsumujmy wstawianie H



Podsumowanie

Można zachować zależność 1 do 1 między drzewami 2-3 a drzewami RB w czasie wstawiania węzłów, odpowiednio stosując trzy proste operacje — rotację w lewo, rotację w prawo i zmianę koloru. Węzeł można wstawić za pomocą wymienionych dalej operacji, które należy wykonać jedna po drugiej na każdym węźle przy poruszaniu się w górę drzewa od punktu wstawiania:

- jeśli prawe dziecko jest czerwone, a lewe — czarne, należy wykonać rotację w lewo.
- jeśli lewe dziecko i jego lewe dziecko są czerwone, należy wykonać rotację w prawo.
- jeśli każde z dzieci jest czerwone, należy zmienić kolor.

Zadanie – wstawianie do drzewa RB

- Zaczynając od pustego drzewa RB wstaw do niego kolejno elementy: S, E, A, R, C, H, X, M, P, L.
- Narysuj drzewo po wstawieniu każdej litery.

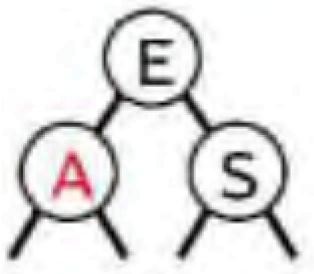
S

drzewo RB

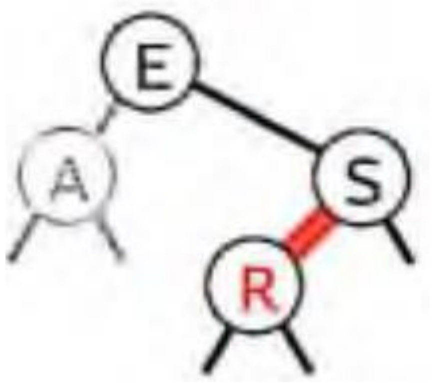
drzewo 2-3

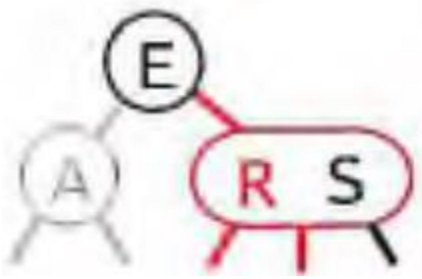
E

A

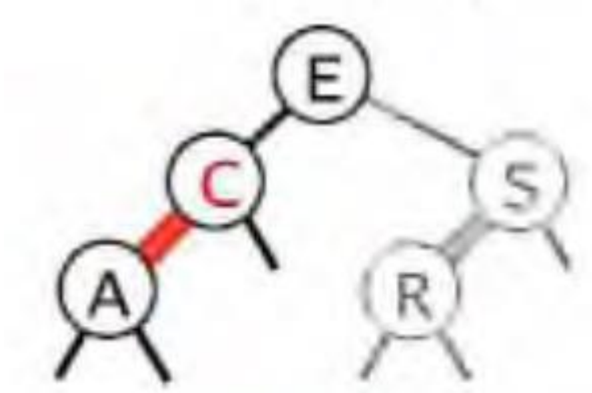


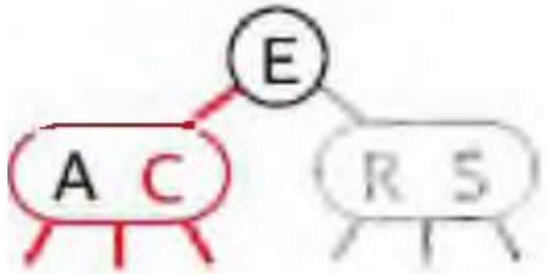
R



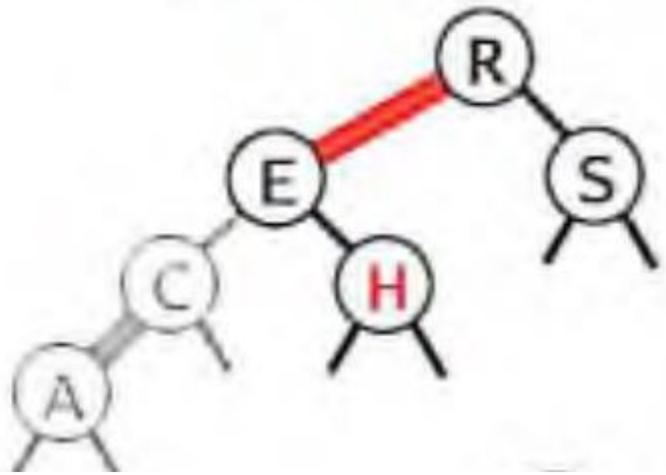


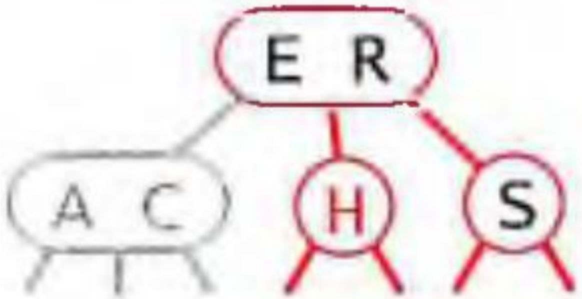
C



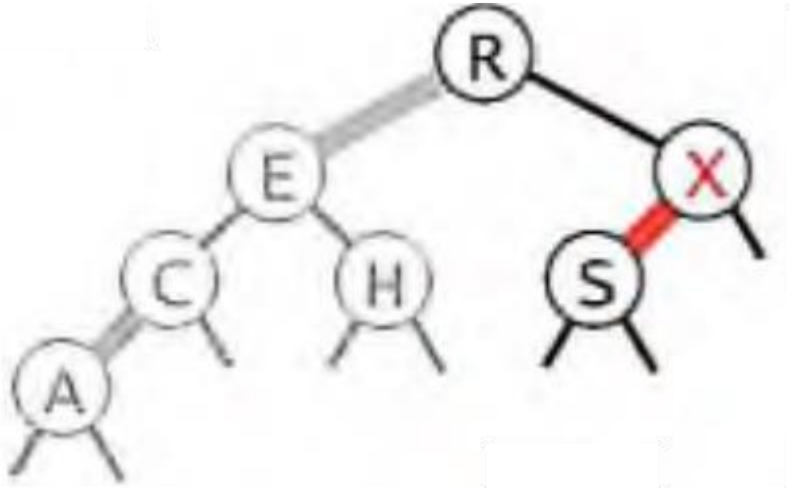


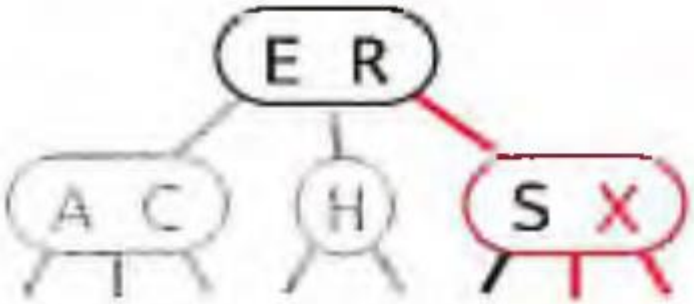
H



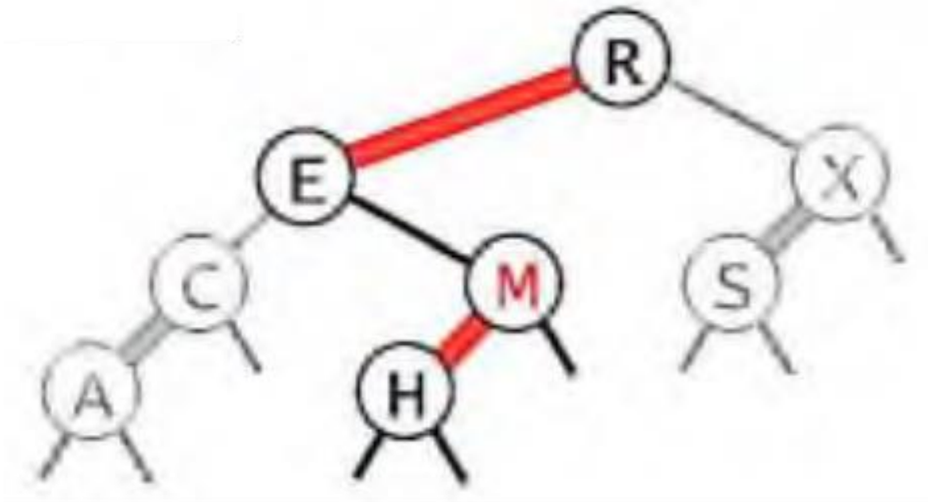


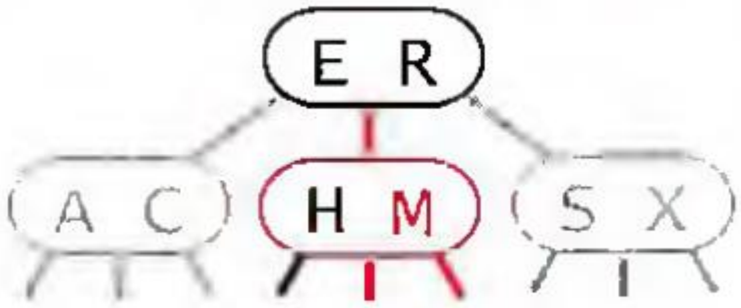
X



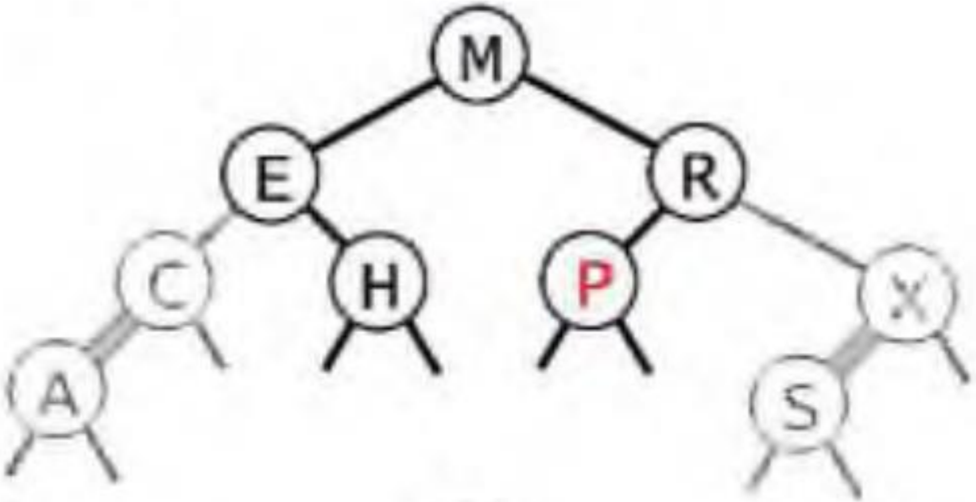


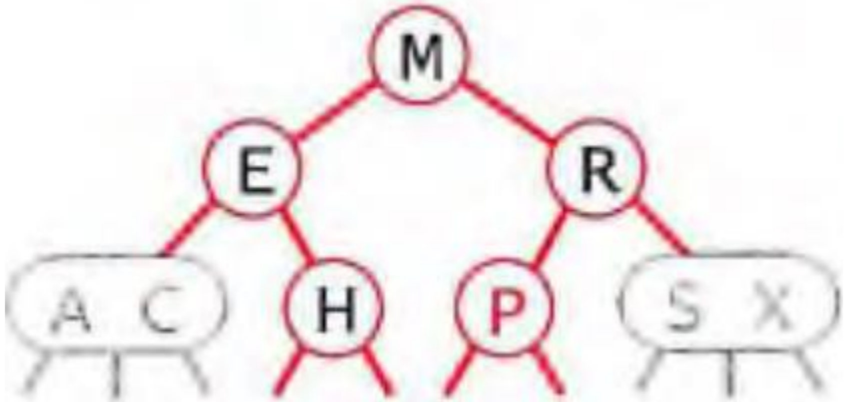
M



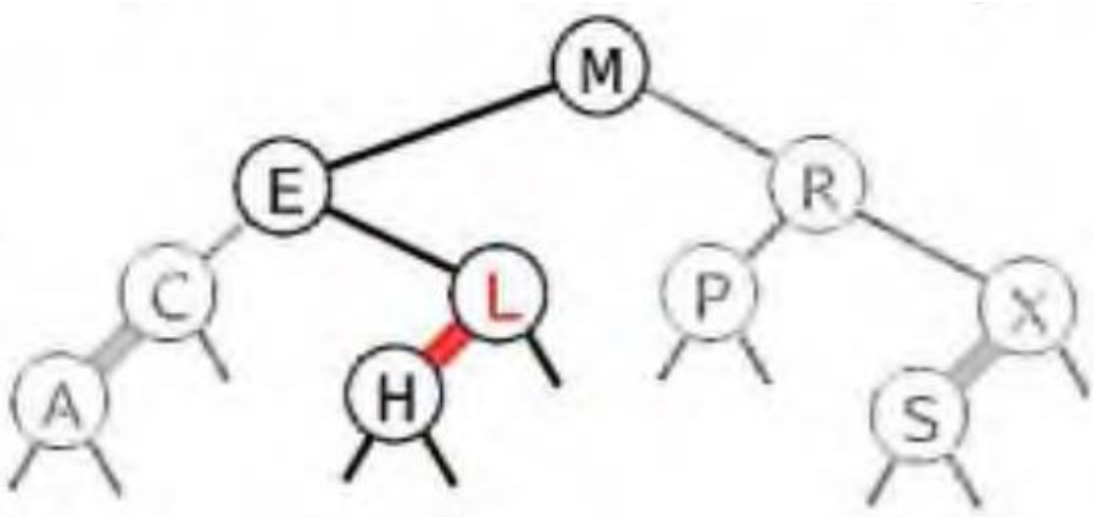


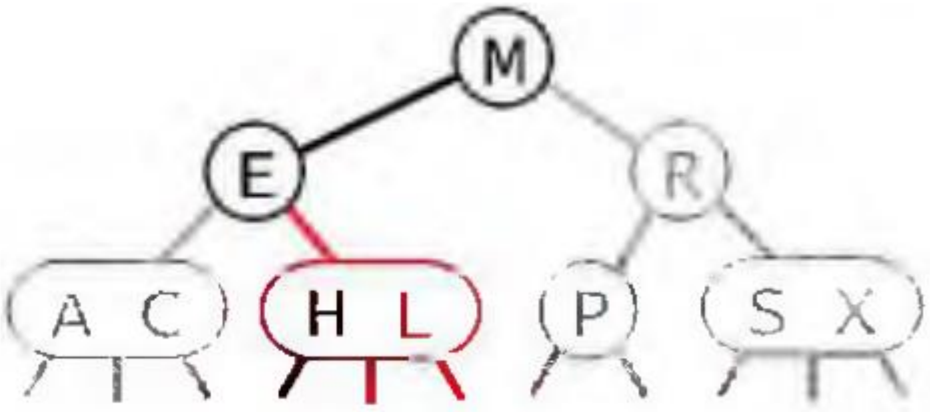
P





L





Zadanie – wstawianie uporządkowanych kluczy do drzewa RB

- Zaczynając od pustego drzewa RB wstaw do niego kolejno elementy: A, C, E, H, L, M, P, R, S, X (te same klucze co wcześniej, ale w kolejności rosnącej)
- Narysuj drzewo po wstawieniu każdej litery.

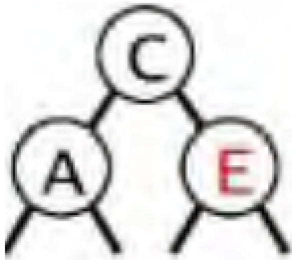
A

drzewo RB

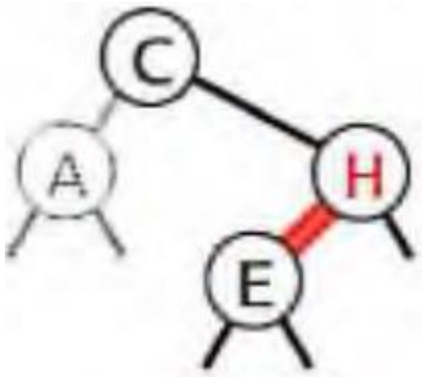
drzewo 2-3

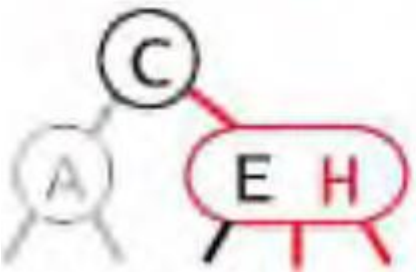
C

E

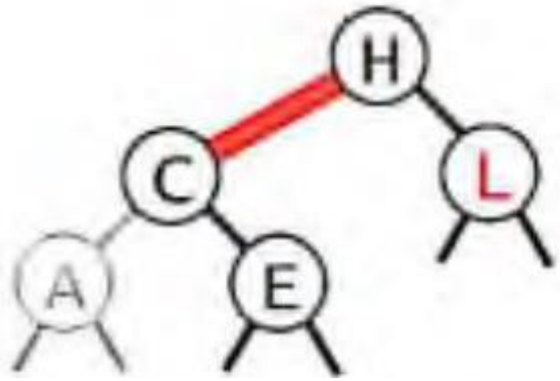


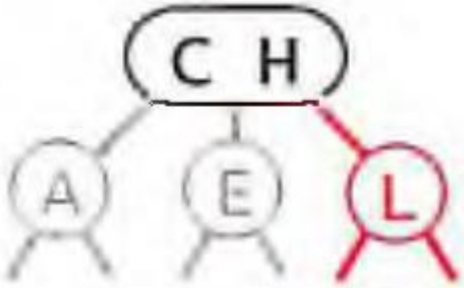
H



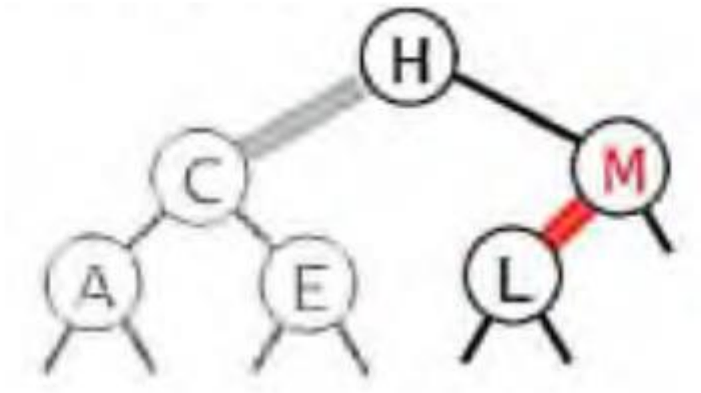


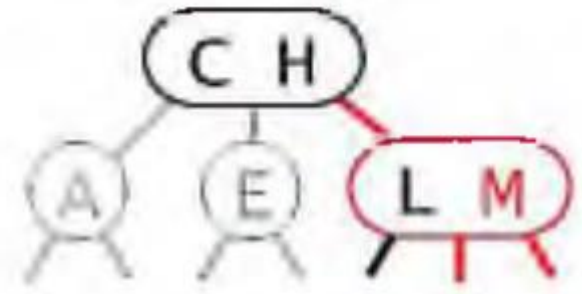
L





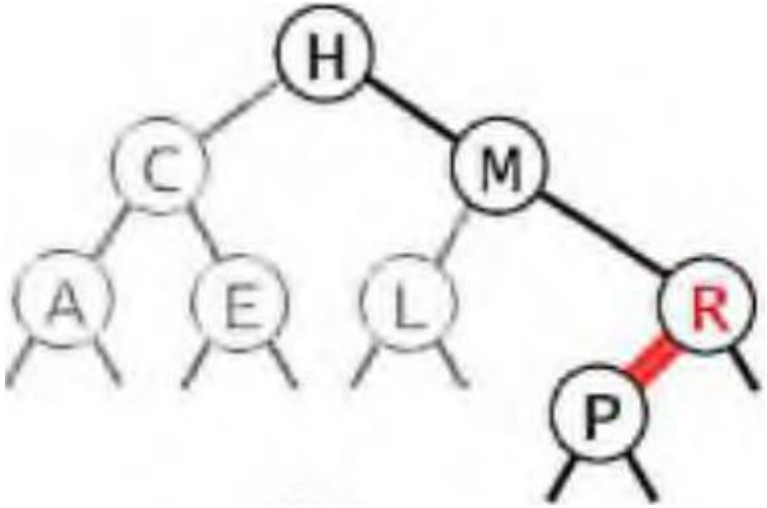
M

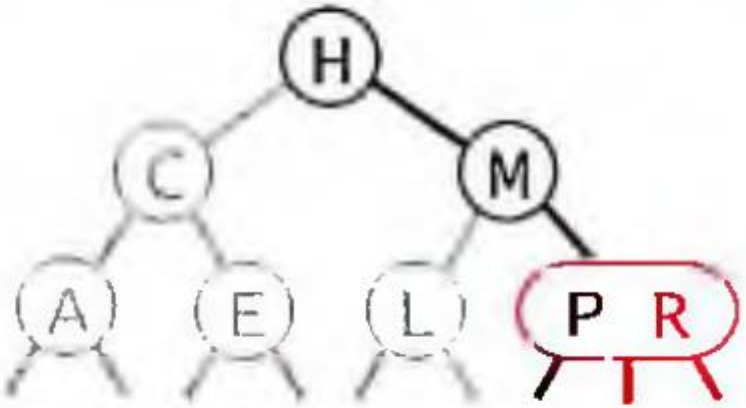




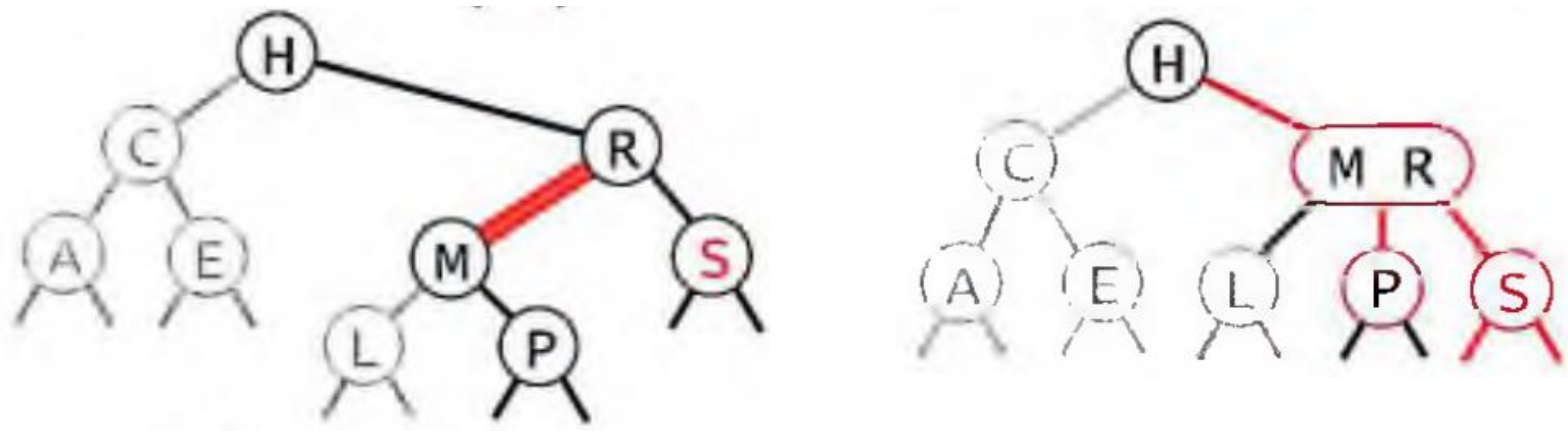
P

R

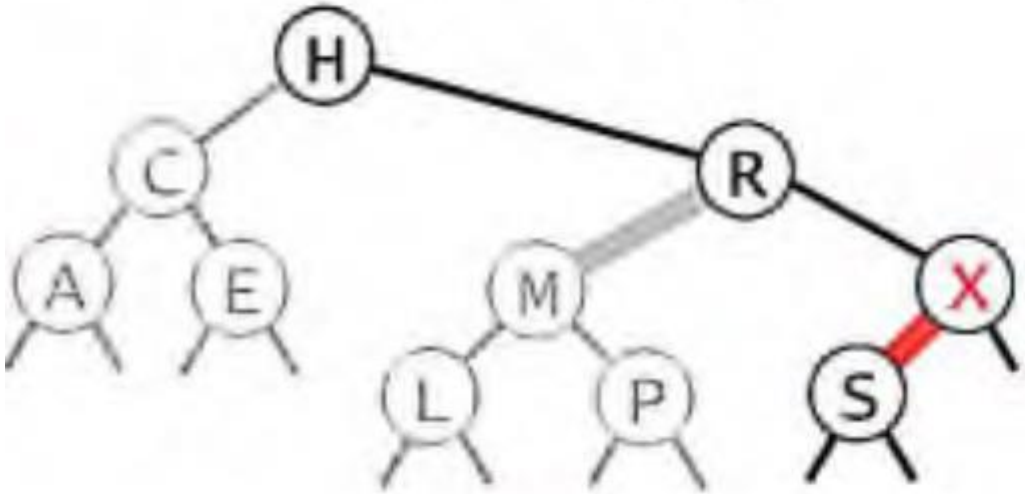


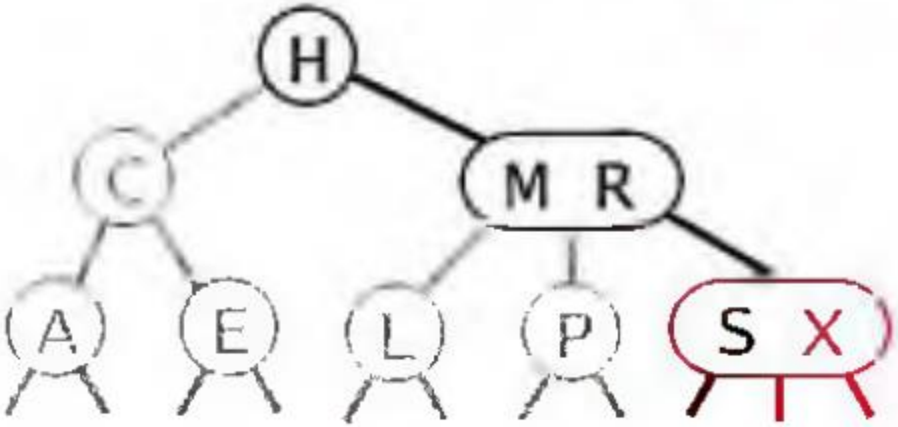


S



X





Koniec ☺