

# Interpolacja

Wykonując wykresy w poniższych zadaniach, może być konieczne dodanie opcji `PlotRange -> All`

## Wzór Lagrange'a

**Zadanie 1.** Napisz funkcję `linspace[a_, b_, n_]` która zwraca  $n$  równo oddalonych punktów z przedziału  $[a, b]$ . Pierwszym punktem ma być  $a$ , ostatnim  $b$ . Przykładowo

`linspace[-1, 1, 3]` zwraca  $\{-1, 0, 1\}$

`linspace[-1, 1, 4]` zwraca  $\{-1, -1/3, 1/3, 1\}$

Wskazówka: Pamiętaj o opóźnionym przypisaniu, tzn. używaj `:=`

**Zadanie 2.** Zdefiniuj i narysuj wielomiany

$$L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad k = 1 \dots n$$

Wskazówka: Zdefiniuj np. `n=7` oraz `x:=linspace[-1, 1, n]`. Można też napisać `x=linspace[-1, 1, n]`, ale wtedy zmieniając  $n$  trzeba ponownie przeliczyć  $x$ . Następnie zdefiniuj `L[k_, n_, t_]` za pomocą `Product`. Aby narysować wszystkie funkcje na jednym rysunku możesz użyć polecenia:

`Plot[Evaluate[Table[L[k, n, t], {k, 1, n}]], {t, -1, 1}, PlotLegends -> "Expressions"]`

**Zadanie 3.** Narysuj funkcję  $\sum_{k=1}^n L_{k,n}(x)$ . Czy jest prawdą, że suma ta równa jest 1?

**Zadanie 4.** Zdefiniuj funkcję  $f(x) = \frac{x^3}{2x+3}$  i oblicz wartości  $y_i = f(x_i)$  dla  $i = 1 \dots n$ .

**Zadanie 5.** Zdefiniuj wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) L_{k,n}(x)$$

Wskazówka: Zdefiniuj `P[n_, t_]` korzystając z `L[k, n, t]` i `y`.

**Zadanie 6.** Narysuj na jednym wykresie funkcję interpolowaną  $f$  i interpolującą  $P_n$ .

**Zadanie 7.** Narysuj na wykresie funkcję błędu, tzn.  $f - P_n$

## Efekt Rungego

**Zadanie 8.** Zdefiniuj funkcję  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ . Narysuj tę funkcję na przedziale  $[-1, 1]$  wraz z wielomianem interpolującym dla różnych  $n$ , małych, dużych, parzystych, nieparzystych, np. 3, 4, 11, 12. Możesz też narysować wykres funkcji błędu (na oddzielnym wykresie).

**Zadanie 9.** Powtórz powyższe zadanie, ale użyj innych węzłów, mianowicie:

$$x_k = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \quad i = 1, \dots, n$$

Są to tak zwane węzły Czebyszewa. Przeczytaj [https://pl.wikipedia.org/wiki/Węzły\\_Czebyszewa](https://pl.wikipedia.org/wiki/Węzły_Czebyszewa)

**Zadanie 10.** Porównaj wykresy wielomianów  $L_{k,n}$  dla węzłów równo oddalonych oraz dla węzłów Czebyszewa. Przetestuj różne wartości  $n$ .

## Wielomiany Bernsteina

**Zadanie 11.** Zdefiniuj funkcję  $f(x) = \sin\left(\frac{10}{10t+1}\right)$  Zrób jej wykres na przedziale  $[0, 1]$ .

**Zadanie 12.** Zdefiniuj wielomian Bernsteina stopnia  $n$  dla funkcji  $f$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

Przeczytaj [https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany\\_Bernsteina](https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Bernsteina)

**Zadanie 13.** Za pomocą Manipulate i Plot zaobserwuj zbieżność wielomianów  $B_n$  do funkcji  $f$ .