

Ekstrema funkcji dwu zmiennych

Wyznaczyć extrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14.$$

Definiujemy funkcję f :

```
f[x_, y_] = x^2 + y^2 - 2 x - 6 y + 14
```

Tworzymy jej wykres:

```
Plot3D[f[x, y], {x, 0, 6}, {y, 1, 7}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}]
```

i wykres poziomicowy:

```
ContourPlot[f[x, y], {x, 0, 6}, {y, 1, 7}, FrameLabel -> {"x", "y"},  
ColorFunction -> ColorData["ThermometerColors"]]
```

Rozwiązując układ równań

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

znajdujemy punkty krytyczne

```
pkryt = Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}, {x, y}]
```

Obliczamy wyznacznik

$$W(x, y) = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

```
wyzn[x_, y_] =
```

```
D[f[x, y], {x, 2}] D[f[x, y], {y, 2}] - (D[f[x, y], x, y])^2
```

Przeprowadzamy test:

jeżeli $W(x_1, y_1) > 0$ to w punkcie (x_1, y_1) funkcja f ma ekstremum, przy czym maksimum, jeżeli $f''_{xx}(x_1, y_1) < 0$ i minimum jeżeli $f''_{xx}(x_1, y_1) > 0$. Jeżeli $W(x_1, y_1) < 0$ to w punkcie (x_1, y_1) funkcja f nie ma ekstremum (punkt siodłowy).

```
wyzn[x, y] /. pkryt
```

Polecenie to mówi: zastosuj podstawienia z listy `pkryt` do wyrażenia `wyzn[x, y]`.

```
D[f[x, y], {x, 2}] /. pkryt
```

Zadanie 1. Wyznaczyć extrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Wsk. Parametry i opcje wykresu:

`{x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotRange -> {-2, 3}, ClippingStyle -> None`

Przed przystąpieniem do rozwiązywania układu równań wydać polecenie:

`Needs["Miscellaneous`RealOnly`"]`

Pominięcie rozwiązań zespolonych:

`pkryt = Part[pkryt, {1, 2, 3}]`

Wyjaśnienie: `Part[pkryt, {1, 2, 3}]` to część listy `pkryt` zawierająca jej pierwszy, drugi i trzeci element.

Zadanie 2. Wyznaczyć extrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4.$$

Wsk. Parametry i opcje wykresu:

`{x, -23, 3}, {y, -1, 2}, PlotRange -> {-2, 10}, ClippingStyle -> None`

Dla rozwiązania układu równań użyć `NSolve` zamiast `Solve`

Zadanie 3. Wyznaczyć extrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4.$$