

Rachunek różniczkowy i całkowy

Pochodna

$D[f[x], x]$ albo $f'[x]$ to pochodna $f'(x)$.

$D[f[x], \{x, n\}]$ to pochodna n -tego rzędu $f^{(n)}(x)$.

Zadanie 1. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = x^3 \sin^2 x.$$

Zadanie 2. Oblicz f'' dla

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Zadanie 3. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$$

Otrzymane wyrażenie jest skomplikowane. Należy je uprościć dopisując `//Simplify`

Zadanie 4. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$$

Zadanie 5. Oblicz pochodną $f^{(50)}$ funkcji

$$f(x) = x^2 \cos ax$$

Całka nieoznaczona

Całka nieoznaczona $\int f(x) dx$ to `Integrate[f[x], x]`

Zadanie 6. Oblicz całkę

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Sprawdź wynik przez różniczkowanie.

Wsk. `g = Integrate[f, x]` zapamiętuje wynik całkowania w zmiennej `g`. Teraz można obliczyć pochodną: `D[g, x]`. Wynik jest niespodziewanie skomplikowany. Zatem uprościmy:

`D[g, x] // Simplify`.

Zadanie 7. Oblicz całkę

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Wynik (`g`) będzie wyglądać nieco ładniej, jeżeli przekształcimy go stosując polecenie `Apart[g]` (zapisz w postaci sumy ułamków).

Całka oznaczona

Całka oznaczona $\int_a^b f(x) dx$ to `Integrate[ f[x], {x, a, b} ]`

Zadanie 8. Oblicz całkę

$$\int_a^b \sin^2 x dx.$$

Zadanie 9. Oblicz całkę

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Wsk. Jako górną granicę całkowania należy wpisać `Infinity`.

Zadanie 10. Oblicz całkę

$$\int_0^\pi \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx.$$

Wsk. Użyj opcji `Assumptions -> {a > 0 && b > 0}` (obliczenia są wykonywane przy założeniu, że $a, b > 0$).

Zadanie 11. Oblicz całkę niewłaściwą

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}.$$

Dla jakiego a całka ta jest zbieżna?

Zadanie 12. Spróbuj obliczyć całkę niewłaściwą

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Co mówi wynik?

Zadanie 13. Spróbuj obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^x dx.$$

M. tego nie potrafi zrobić. Oblicz tę całkę w przybliżeniu (użyj polecenia `NIntegrate[f[x],{x, a, b}]`).

Zadanie 14. Użyj `Integrate` dla znalezienia całki

$$\int_0^1 \sqrt{x^3 + 3x + 1} dx.$$

Mathematica tego nie potrafi zrobić. Oblicz tę całkę w przybliżeniu (użyj polecenia `NIntegrate[f[x],{x, a, b}]`).

Granica funkcji

Granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

oblicza się w programie Mathematica poleceniem `Limit[f[x], x-> x0]`.

Zadanie 15. Niech

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x}, \quad -4\pi \leq x \leq 4\pi.$$

Utwórz wykres funkcji f . Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Zadanie 16. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Wskazówka: oznaczeniem ∞ jest `Infinity`

Granice jednostronne

Granice prawostronną $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$

oblicza się w programie Mathematica poleceniem

`Limit[f[x], x-> x0, Direction -> -1]`,

a granicę lewostronną $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ oblicza się przez

`Limit[f[x], x-> x0, Direction -> 1]`.

Zadanie 17. Utwórz wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 1 \\ \sin x, & x > 1. \end{cases}$$

Oblicz granice jednostronne

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x).$$

Wsk. Zdefiniuj najpierw funkcję

`f[x_] = Piecewise[{{x^2 + x + 1, x <= 1}, {Sin[x], x > 1}}`

Zadanie 18. Utwórz wykres funkcji

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Co odpowie Mathematica na pytanie o granicę tej funkcji w zerze?

Zadanie 19. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Wsk. $\operatorname{ctg} x$ to $\operatorname{Cot}[x]$.

Zadanie 20. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x}$$

Wsk. Mathematica nie wie jak tę granicę obliczyć bez dodatkowej informacji o parametrze a . Należy dodać opcję

`Assumptions -> a > 1`

Zadanie 21. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x}$$

Zadanie 22. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

Zadanie 23. Niech

$$u(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

oraz

$$v(x) = \frac{1}{x^s}$$

Wyznaczyć takie s , że istnieje właściwa granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)} > 0$$

Zadanie 24. Wyznaczyć granicę punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}.$$

Wsk. `Limit[f[n, x], n -> Infinity, Assumptions -> x > 0]`

Opcja `Assumptions -> x > 0` powoduje, że granica jest obliczana przy założeniu, że $x > 0$.

Pokazać w jaki sposób wykres funkcji f_n zbliża się do wykresu funkcji granicznej.

Czy zbieżność ta jest jednostajna?