

Sumy i szeregi

Polecenie `Sum[f[k], {k, m, n}]` oblicza sumę

$$\sum_{k=m}^n f(k).$$

Zadanie 1. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^n k^2.$$

Zadanie 2. Sprawdź, że zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Zadanie 3. Oblicz

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Wsk. $\binom{n}{k}$ to w programie Mathematica `Binomial[n, k]`

Zadanie 4. Oblicz

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1).$$

Polecenie `Product[f[k], {k, m, n}]` oblicza iloczyn

$$\prod_{k=m}^n f(k).$$

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))^2 (2n+1)}$$

Szeregi i iloczyny nieskończone

Polecenie `Sum[a[k], {k, 1, Infinity}]` oblicza sumę szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Zadanie 6. Wyznacz sumę szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Zadanie 7. Wyznacz sumę szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Zadanie 8. Wyznacz sumę szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

Zadanie 9. Używając `Manipulate` z parametrem `n` utworzyć rodzinę wykresów funkcji

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

dla $n = 1, 2, \dots, 10$.

(T_n jest wielomianem Taylora stopnia n funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie 0).

Wsk. Jako zakres zmiennej x wybrać odcinek $[-4\pi, 4\pi]$, jako zakres zmiennej y (`PlotRange`) wybrać odcinek $[0, 10]$. Dodać wykres funkcji $f(x) = \sin x$.

Wsk.: `{n, 1, 10, 1}` w `Manipulate` oznacza, że wartości parametru n zmieniają się od 0 do 10 co 1.

Zadanie 10. Używając `Manipulate` z parametrem `n` utworzyć rodzinę wykresów funkcji

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

dla $n = 1, 2, \dots, 10$, gdzie T_n jest wielomianem Taylora stopnia n funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w punkcie 0.

Parametry wykresu wybrać tak, aby widoczna była zbieżność T_n do f na odcinku $(-1, 1]$.

Zadanie 11. Funkcja

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 3^k x}{2^k}$$

jest ciągła, nieróżniczkowalna w żadnym punkcie.

Używając **Manipulate** z parametrem **n** utworzyć rodzinę wykresów funkcji

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin 3^k x}{2^k}, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

dla $n = 0, 1, \dots, 10$.